

Città Frattali: geometria frattale della crescita urbana e sprawl

Fondamenti della Geometria Frattale Urbana

1.1 Introduzione: La città come oggetto frattale

Le città rappresentano uno dei fenomeni più complessi generati dall'attività umana, caratterizzate da una stratificazione di processi decisionali individuali e collettivi che si dispiegano attraverso scale temporali e spaziali diverse. Negli ultimi decenni, la geometria frattale ha fornito un potente strumento concettuale e analitico per comprendere la struttura e la dinamica dei sistemi urbani, rivelando proprietà autosimilari e leggi di scala che sfuggono alle descrizioni tradizionali basate sulla geometria euclidea.

Il concetto di frattale, introdotto dal matematico Benoît Mandelbrot negli anni Settanta, si riferisce a oggetti geometrici che esibiscono auto-similarità attraverso diverse scale di osservazione. Quando si osserva una città da satellite e si procede progressivamente a ingrandimenti maggiori, si scopre che la complessità del tessuto urbano si ripete in forme analoghe: i confini delle aree urbanizzate mostrano irregolarità a ogni livello di dettaglio, dalla forma complessiva della metropoli fino ai singoli isolati. Questa proprietà di invarianza di scala suggerisce che i processi di crescita urbana operino secondo meccanismi che generano strutture simili indipendentemente dalla scala considerata.

1.1.1 La rivoluzione concettuale di Mandelbrot

Prima dell'introduzione del concetto di frattale, la geometria urbana veniva analizzata prevalentemente attraverso strumenti euclidei tradizionali: cerchi concentrici (modello di Burgess), settori radiali (modello di Hoyt), o nuclei multipli (modello di Harris e Ullman). Questi modelli, pur offrendo intuizioni preziose sulla struttura urbana, non catturavano la complessità irregolare e auto-similare osservabile nelle città reali.

Mandelbrot dimostrò che molti fenomeni naturali precedentemente considerati "irregolari" o "patologici" seguivano in realtà leggi geometriche precise ma non euclidee. La sua celebre domanda "Quanto è lunga la costa della Gran Bretagna?" rivelò che la lunghezza misurata dipende dalla scala di osservazione: più fine è la risoluzione, più lunga risulta la costa, senza convergenza a un valore definito. Questo paradosso apparente viene risolto attraverso il concetto di dimensione frattale, che quantifica proprio il tasso con cui la lunghezza misurata aumenta al diminuire della risoluzione.

L'applicazione di questi concetti alle città ha rivelato che i perimetri urbani condividono proprietà matematiche con le coste naturali, suggerendo che processi di crescita urbana, sebbene guidati da decisioni umane, generano pattern con regolarità statistiche comparabili a quelle di fenomeni naturali. Questa scoperta ha profonde implicazioni filosofiche sulla natura dell'ordine urbano: le città non sono né completamente ordinate (come una griglia

regolare) né completamente caotiche, ma occupano uno stato intermedio di "ordine complesso" caratterizzabile attraverso la dimensione frattale.

1.2 La dimensione frattale: definizione e significato nel contesto urbano

La dimensione frattale costituisce il parametro fondamentale per caratterizzare quantitativamente la complessità geometrica di un oggetto frattale. A differenza della dimensione topologica, che assume solo valori interi (zero per un punto, uno per una linea, due per una superficie, tre per un volume), la dimensione frattale può assumere valori frazionari che quantificano quanto efficacemente un oggetto riempie lo spazio in cui è immerso.

Per una curva frattale, come il perimetro di un'area urbana, la dimensione frattale D è definita attraverso la relazione di scaling che lega la misura $L(\epsilon)$ della curva alla risoluzione ϵ con cui viene misurata. Quando si misura il perimetro di una città utilizzando segmenti di lunghezza ϵ , si ottiene una lunghezza totale che cresce al diminuire di ϵ secondo la legge:

$$L(\epsilon) \propto \epsilon^{(1-D)}$$

dove D è la dimensione frattale. Per una linea perfettamente liscia, $D = 1$ e la lunghezza misurata converge a un valore finito indipendentemente dalla risoluzione. Per curve più irregolari, D assume valori compresi tra uno e due: quanto più D si avvicina a due, tanto più la curva è complessa e frastagliata, tendendo a riempire bidimensionalmente lo spazio.

1.2.1 Interpretazione intuitiva della dimensione frattale

Per comprendere intuitivamente cosa rappresenti la dimensione frattale, consideriamo esempi progressivi di complessità crescente. Una linea retta ha $D = 1$ perché è intrinsecamente unidimensionale. Un quadrato pieno ha $D = 2$ perché riempie completamente uno spazio bidimensionale. Una curva che serpeggia attraverso il piano senza mai intersecare se stessa, riempiendo parzialmente lo spazio bidimensionale, avrà $1 < D < 2$.

Più precisamente, D misura la dimensione efficace dello spazio occupato dalla struttura. Un perimetro urbano con $D = 1.3$ significa che la curva è "più che unidimensionale" ma "meno che bidimensionale" – occupa lo spazio in modo intermedio. Questo valore di 1.3 indica una moderata irregolarità, tipica di città compatte con perimetri relativamente lisci. Un valore di $D = 1.6$ indica invece una curva molto più complessa e frastagliata, che si avvicina maggiormente a riempire bidimensionalmente il piano, tipica di città con sprawl pronunciato.

1.2.2 Dimensione frattale e autosimilarità statistica

Un concetto chiave associato ai frattali è l'autosimilarità: la proprietà per cui parti di un oggetto assomigliano all'oggetto intero. Nei frattali matematici puri, come l'insieme di Mandelbrot o la curva di Koch, l'autosimilarità è esatta: ingrandendo una porzione qualsiasi si ottiene una copia identica dell'intero. Nelle città reali, l'autosimilarità è statistica: le proprietà statistiche (complessità, densità di ramificazioni) si ripetono attraverso le scale, ma non le forme esatte.

Questa autosimilarità statistica implica che non esista una scala "naturale" privilegiata per osservare la città. La complessità del tessuto urbano è presente a tutte le scale, dai pattern metropolitani regionali (decine di chilometri) fino alla struttura dei singoli quartieri (centinaia di metri). Questa proprietà multi-scala è ciò che rende la dimensione frattale un descrittore così potente: cattura in un singolo numero una caratteristica che si manifesta attraverso ordini di grandezza spaziali.

1.2.3 Significato urbanistico della dimensione frattale

Nel contesto urbano, questa relazione si manifesta concretamente quando si confrontano misurazioni del perimetro urbano effettuate a scale diverse. Utilizzando immagini satellitari con risoluzioni differenti, dal chilometro fino al metro, si osserva che la lunghezza del perimetro aumenta sistematicamente all'aumentare della risoluzione, rivelando dettagli progressivamente più fini della struttura urbana. Il valore di D estratto da questa analisi fornisce una misura sintetica della complessità morfologica della città.

Dal punto di vista urbanistico, la dimensione frattale codifica informazioni cruciali sulla modalità di crescita urbana. Una città che si espande in modo compatto, saturando progressivamente il territorio disponibile, mantiene un perimetro relativamente semplice e regolare (basso D). Una città che si espande in modo frammentato, con sviluppi che si propagano lungo assi preferenziali lasciando ampie aree interstiziali, genera un perimetro complesso e irregolare (alto D).

Questa connessione tra D e modalità di crescita permette di utilizzare la dimensione frattale come indicatore diagnostico dello sprawl urbano. Valori elevati di D segnalano espansione dispersa, che tipicamente correla con inefficienza infrastrutturale, dipendenza dall'automobile, e consumo elevato di suolo per abitante. Valori bassi di D indicano crescita compatta, associata a maggiore efficienza, accessibilità del trasporto pubblico, e minore impatto ambientale.

1.3 Metodi di calcolo della dimensione frattale

Esistono diversi metodi per stimare la dimensione frattale di un'area urbana, ciascuno con caratteristiche e ambiti di applicabilità specifici. La scelta del metodo dipende dal tipo di dati disponibili, dalla scala di analisi, e dagli obiettivi specifici della ricerca.

1.3.1 Il metodo del box-counting

Il metodo del box-counting rappresenta probabilmente l'approccio più diffuso nella letteratura scientifica per la sua robustezza e semplicità computazionale. Questo metodo consiste nel ricoprire l'immagine dell'area urbana con una griglia di celle quadrate di lato ϵ e nel contare il numero $N(\epsilon)$ di celle che contengono almeno un pixel appartenente alla struttura urbana. La dimensione frattale si ottiene dalla pendenza della relazione logaritmica:

$$\log N(\epsilon) \propto -D \log \epsilon$$

In pratica, si ripete questa procedura per una serie di valori di ϵ che coprono tipicamente due o tre ordini di grandezza (ad esempio, da 10 metri a 1000 metri), si registrano i corrispondenti valori di $N(\epsilon)$, e si traccia un grafico log-log di $N(\epsilon)$ contro ϵ . Se la struttura è

effettivamente frattale, i punti giaceranno approssimativamente su una linea retta, la cui pendenza (in valore assoluto) fornisce la stima di D .

Vantaggi del box-counting:

- Semplicità concettuale e implementativa
- Applicabilità a qualsiasi tipo di immagine binaria (urbano/non-urbano)
- Robustezza a rotazioni e traslazioni dell'immagine
- Non richiede identificazione di un centro o di una direzione privilegiata

Limitazioni del box-counting:

- Dipendenza dalla scelta dell'origine della griglia (mitigabile mediante averaging su origini multiple)
- Sensibilità al range di scale utilizzate (necessità di scala minima e massima appropriate)
- Difficoltà nell'identificare regioni di scaling dove la relazione è effettivamente lineare
- Tendenza a sovrastimare D per strutture finite con bordi

Un raffinamento importante è il differential box-counting, che invece di considerare immagini binarie analizza immagini in scala di grigi (ad esempio, densità edilizia variabile) e calcola D considerando non solo la presenza/assenza di urbanizzazione ma anche la sua intensità.

1.3.2 Il metodo del perimetro-area

Il metodo del perimetro-area si basa sulla relazione tra il perimetro P e l'area A di patch urbane di diverse dimensioni. Per strutture frattali, questa relazione assume la forma:

$$P \propto A^{(D/2)}$$

dove D è la dimensione frattale del perimetro. Questo metodo risulta particolarmente utile quando si dispone di una segmentazione dettagliata del territorio in aree urbane discrete, come isolati o quartieri.

La procedura consiste nell'identificare un insieme di patch urbane di dimensioni variabili (idealmente coprendo almeno due ordini di grandezza in area), misurare per ciascuna il perimetro P e l'area A , e tracciare un grafico log-log di P contro A . La pendenza della relazione lineare nel grafico log-log è $D/2$, da cui si ricava D .

Vantaggi del metodo perimetro-area:

- Non richiede scelta di una griglia arbitraria
- Utilizza direttamente la geometria naturale delle patch urbane
- Fornisce informazioni sulla distribuzione di dimensioni delle patch
- Può essere applicato separatamente a diverse categorie d'uso del suolo

Limitazioni:

- Richiede segmentazione accurata del territorio, che può essere problematica
- Sensibile ai criteri di definizione dei confini delle patch

- Necessita di un numero sufficiente di patch per ottenere stime robuste
- Può essere influenzato da effetti di bordo per patch molto grandi o molto piccole

1.3.3 Il metodo della dilatazione morfologica

Il metodo della dilatazione morfologica sfrutta le operazioni della morfologia matematica per espandere progressivamente la struttura urbana e misurare come varia la sua area in funzione del raggio di dilatazione. Anche in questo caso, la relazione di scaling fornisce una stima della dimensione frattale.

Tecnicamente, si parte dall'immagine binaria dell'area urbana e si applica un'operazione di dilatazione con un elemento strutturante (tipicamente un disco) di raggio r crescente. Per ogni valore di r , si misura l'area totale $A(r)$ della struttura dilatata. Per strutture frattali, si ha:

$$A(r) - A(0) \propto r^D$$

dove $A(0)$ è l'area originale e D è la dimensione frattale. Un grafico log-log di $[A(r) - A(0)]$ contro r rivela D come pendenza della relazione lineare.

Vantaggi della dilatazione morfologica:

- Particolarmente sensibile alla struttura fine del perimetro
- Non richiede sovrapposizione di griglie arbitrarie
- Interpretazione geometrica chiara (espansione uniforme verso l'esterno)
- Meno sensibile a effetti di discretizzazione dell'immagine

Limitazioni:

- Computazionalmente più intensiva per immagini grandi
- Può essere influenzata da patch isolate distanti dal corpo principale
- La scelta dell'elemento strutturante (forma) può influenzare i risultati
- Richiede attenzione al range di raggi di dilatazione utilizzati

1.3.4 Il metodo della funzione di correlazione radiale

Un quarto approccio, basato sulla funzione di correlazione radiale, analizza come la densità urbana decade con la distanza dal centro della città. Per sistemi frattali, questa densità segue una legge di potenza con esponente legato alla dimensione frattale.

Formalmente, si definisce la funzione di correlazione radiale $C(r)$ come la probabilità che due punti separati da una distanza r appartengano entrambi all'area urbana, mediata su tutte le possibili coppie. Per strutture frattali con dimensione D , si ha:

$$C(r) \propto r^{(D-d)}$$

dove d è la dimensione dello spazio embedding ($d=2$ per il piano). Pertanto, in due dimensioni, un grafico log-log di $C(r)$ contro r ha pendenza $D-2$.

Vantaggi della correlazione radiale:

- Fornisce informazioni sulla struttura spaziale e sulla distribuzione di densità
- Non richiede definizione di un perimetro esplicito
- Applicabile anche a distribuzioni di punti (edifici individuali) senza necessità di immagini raster
- Sensibile alla struttura a tutte le scale simultaneamente

Limitazioni:

- Richiede identificazione di un centro appropriato (non sempre ovvio per città policentriche)
- Computazionalmente intensivo per dataset molto grandi
- Può essere influenzato da anisotropie (diverse densità in direzioni diverse)
- L'interpretazione è meno intuitiva rispetto ad altri metodi

1.3.5 Confronto e validazione incrociata dei metodi

Una questione metodologica importante riguarda la concordanza tra stime di D ottenute con metodi diversi applicati alla stessa città. Studi comparativi hanno mostrato che, in generale, i diversi metodi producono stime ragionevolmente consistenti (tipicamente entro 0.1 unità di D), ma possono esistere discrepanze sistematiche.

Il box-counting tende a essere il metodo più conservativo, spesso producendo stime leggermente inferiori. Il metodo perimetro-area può essere più sensibile a irregolarità a scala fine. La dilatazione morfologica tende a dare risultati intermedi. La correlazione radiale è più influenzata dalla distribuzione complessiva di massa piuttosto che dalla complessità del perimetro.

La best practice nella ricerca rigorosa consiste nell'applicare multipli metodi e riportare la gamma di stime, accompagnata da analisi di sensibilità rispetto ai parametri metodologici (range di scale, origine della griglia, criteri di segmentazione). Convergenza tra metodi diversi rafforza la confidenza nei risultati; discrepanze significative segnalano necessità di indagine più approfondita o possibile presenza di artefatti nei dati.

1.4 Dimensione frattale dei perimetri urbani: evidenze empiriche

Le misurazioni empiriche della dimensione frattale dei perimetri urbani, condotte su centinaia di città in diversi continenti, hanno rivelato un pattern notevolmente consistente. I valori tipici di D si collocano nell'intervallo compreso tra 1.2 e 1.7, con una mediana intorno a 1.4. Questo range relativamente ristretto suggerisce che, nonostante le enormi differenze culturali, geografiche ed economiche tra le città del mondo, i processi di crescita urbana generano strutture con proprietà frattali universali.

1.4.1 Città compatte: il limite inferiore ($D \approx 1.2-1.3$)

Le città con valori di D vicini al limite inferiore di questo intervallo, tipicamente intorno a 1.2-1.3, presentano perimetri relativamente lisci e compatti. Esempi classici includono alcune città europee di fondazione romana o medievale, dove i vincoli topografici o le fortificazioni storiche hanno determinato forme urbane regolari.

Vienna: Con il suo nucleo storico circondato dalla Ringstraße circolare, Vienna rappresenta un archetipo di città compatta. L'analisi del perimetro del distretto centrale (Innere Stadt) rivela $D \approx 1.22$, riflettendo la geometria quasi perfettamente circolare imposta dalle antiche mura medievali, demolite nel XIX secolo e sostituite dalla Ringstraße. Anche l'area metropolitana più estesa mantiene D relativamente basso (≈ 1.35) grazie a politiche di contenimento dello sprawl e preservazione della cintura verde.

Amsterdam: Le città olandesi con i loro canali concentrici mostrano valori di D relativamente bassi nelle loro porzioni centrali. Amsterdam presenta $D \approx 1.28$ per il nucleo storico definito dai canali principali (Grachtengordel). La geometria radiale-concentrica, benché non perfettamente circolare, genera comunque un perimetro con complessità moderata.

Bologna: Il centro storico di Bologna, contenuto entro le antiche mura medievali ancora parzialmente visibili, mostra $D \approx 1.25$. La forma ellittica allungata del perimetro storico riflette l'espansione romana originale seguita da successive fortificazioni medievali. Le espansioni moderne hanno aumentato D a circa 1.4 per l'area metropolitana, ma rimane inferiore alla media globale.

1.4.2 Città intermedie: il range medio ($D \approx 1.4-1.5$)

La maggior parte delle città globali si colloca in questo range intermedio, che rappresenta un compromesso tra crescita organica relativamente densa e alcune ramificazioni lungo direttrici preferenziali. Questo range include città con morfologie molto diverse ma che condividono una moderata complessità perimetrale.

Londra: La capitale britannica mostra $D \approx 1.45$ per la Greater London. Il perimetro combina segmenti relativamente lineari lungo il Tamigi con ramificazioni lungo le principali linee ferroviarie radiali. Il Greenbelt londinese ha storicamente contenuto lo sprawl, mantenendo D in range moderato nonostante l'espansione demografica continua.

Parigi: L'area metropolitana parigina presenta $D \approx 1.42$. La struttura radiale con grandi boulevards e la preservazione di spazi verdi significativi (Bois de Boulogne, Bois de Vincennes) generano un perimetro con complessità moderata. Le villes nouvelles (città nuove) pianificate nella regione Île-de-France hanno contribuito a una struttura policentrica che limita lo sprawl incontrollato.

Tokyo: Nonostante sia una delle megalopoli più popolate al mondo, Tokyo mantiene $D \approx 1.48$ grazie all'elevata densità e all'efficiente sistema di trasporto pubblico che ha orientato lo sviluppo in corridoi ad alta densità lungo le linee ferroviarie piuttosto che in sprawl diffuso.

1.4.3 Città con sprawl pronunciato: il limite superiore ($D \approx 1.6-1.7$)

All'estremo opposto dello spettro, città caratterizzate da sprawl pronunciato e crescita a bassa densità esibiscono valori di D che possono raggiungere 1.6 o persino superare 1.7. Queste città presentano perimetri estremamente frastagliati, con numerose propaggini che si estendono nel territorio rurale circostante lungo le direttrici di trasporto.

Phoenix, Arizona: Phoenix rappresenta forse l'esempio paradigmatico di sprawl estremo con $D \approx 1.68$. La città si è espansa a bassissima densità nel deserto di Sonora, con sviluppi residenziali suburbani che si estendono per decine di chilometri in tutte le direzioni dal centro, collegati da una rete autostradale estensiva. L'assenza di significativi vincoli topografici e una cultura fortemente automobilistica hanno permesso espansione praticamente illimitata.

Atlanta, Georgia: Atlanta mostra $D \approx 1.65$, risultato di decenni di crescita suburbana dispersa. La città è nota per avere una delle più basse densità tra le grandi metropoli americane, con vaste aree di sviluppo residenziale a bassa densità alternate a zone commerciali lungo arterie principali, generando un perimetro metropolitano estremamente complesso.

Los Angeles, California: Sebbene parti di Los Angeles siano relativamente dense, l'area metropolitana complessiva presenta $D \approx 1.62$. La combinazione di sprawl suburbano, sviluppo a bassa densità in valli (San Fernando Valley, San Gabriel Valley), e ramificazioni lungo costa e verso l'interno genera una morfologia altamente frammentata.

Houston, Texas: Houston esemplifica lo sprawl non pianificato con $D \approx 1.64$. La città è famosa per la quasi totale assenza di zoning tradizionale, permettendo sviluppi edilizi con pochi vincoli. Il risultato è un tessuto urbano estremamente disperso con finger-like extensions lungo le autostrade radiali intervallate da ampie zone non sviluppate.

1.4.4 Pattern geografici e culturali

L'analisi comparativa globale rivela pattern geografici e culturali sistematici. Le città nordamericane tendono ad avere D mediamente più elevato (mediana ≈ 1.55) rispetto alle città europee (mediana ≈ 1.38) e asiatiche ad alta densità (mediana ≈ 1.42). Questo riflette differenze storiche nei modelli di pianificazione, nella disponibilità di territorio, nelle preferenze residenziali, e nel ruolo dell'automobile.

All'interno degli Stati Uniti, esiste un gradiente geografico: città della costa orientale più antiche (Boston, Philadelphia, New York) tendono ad avere D inferiore (1.4-1.5) rispetto a città del Sud e dell'Ovest sviluppate principalmente dopo la Seconda Guerra Mondiale (Phoenix, Las Vegas, Houston) che mostrano D superiore (1.6-1.7). Questo pattern riflette l'epoca di sviluppo principale: città cresciute nell'era pre-automobilistica mantengono maggiore compattezza.

1.5 La relazione tra dimensione frattale e forme di urbanizzazione

La dimensione frattale si configura come un potente descrittore sintetico delle modalità di crescita urbana, correlata con numerose caratteristiche morfologiche, funzionali e socioeconomiche delle città. La relazione fondamentale che la teoria frattale stabilisce è quella tra D e due paradigmi opposti di sviluppo urbano: lo sprawl urbano e la città compatta.

1.5.1 Lo sprawl urbano: definizione e caratterizzazione frattale

Lo sprawl urbano, termine che designa la crescita urbana dispersa e a bassa densità che caratterizza molte città contemporanee, si manifesta geometricamente attraverso elevati

valori della dimensione frattale. Quando una città si espande secondo il modello dello sprawl, nuovi sviluppi edilizi si localizzano lungo le principali arterie di trasporto che si irradiano dal centro, creando finger-like extensions che penetrano profondamente nel territorio rurale.

Caratteristiche morfologiche dello sprawl:

- Sviluppo lineare lungo assi di trasporto (leap-frog development)
- Ampie aree interstiziali non urbanizzate o sottoutilizzate
- Perimetro urbano altamente irregolare e frastagliato
- Bassa densità abitativa (tipicamente < 20 abitanti/ettaro)
- Separazione funzionale tra residenza, commercio, e lavoro
- Dipendenza dall'automobile per la mobilità

Questa morfologia produce perimetri estremamente irregolari che, misurati ad alta risoluzione, rivelano una complessità geometrica elevata tradotta in valori di D superiori a 1.5. La relazione tra sprawl e D elevato non è meramente descrittiva ma causale: il processo stesso di sprawl, caratterizzato da sviluppi incrementali lungo direttrici preferenziali, genera necessariamente strutture frattali complesse.

Conseguenze ambientali dello sprawl:

- Consumo eccessivo di suolo agricolo e naturale (tipicamente 3-5 volte superiore rispetto a sviluppo compatto per abitante)
- Frammentazione degli habitat ecologici e perdita di biodiversità
- Aumento delle distanze percorse e conseguentemente delle emissioni da trasporto (incremento stimato del 30-50%)
- Impermeabilizzazione estesa del suolo con alterazione del ciclo idrologico
- Riduzione della capacità di sequestro del carbonio per perdita di vegetazione

Conseguenze socioeconomiche dello sprawl:

- Costi infrastrutturali elevati per abitante (strade, acquedotti, fognature, elettricità)
- Inefficienza del trasporto pubblico per bassa densità
- Ridotta accessibilità per chi non dispone di automobile privata (problematico per bambini, anziani, persone a basso reddito)
- Segregazione spaziale tra gruppi socioeconomici
- Perdita di vitalità degli spazi pubblici e del senso di comunità
- Tempi di commuting elevati con impatti sulla qualità della vita e produttività

1.5.2 La città compatta: morfologia e vantaggi

Al polo opposto si colloca il modello della città compatta, caratterizzato da elevate densità abitative, uso misto del suolo, perimetri urbani definiti e contenuti. Le città compatte presentano valori di D inferiori, tipicamente nell'intervallo 1.2-1.4, riflettendo forme urbane più regolari e continue.

Caratteristiche morfologiche della città compatta:

- Perimetro urbano definito e relativamente regolare

- Densità elevate (tipicamente > 50 abitanti/ettaro)
- Uso misto del suolo con prossimità tra funzioni diverse
- Rete stradale fitta e ben connessa
- Trasporto pubblico efficiente e mobilità attiva praticabile
- Spazi pubblici vitali e accessibili

Vantaggi della città compatta:

- Efficienza energetica: riduzione del 30-40% del consumo energetico per abitante rispetto a sprawl
- Riduzione delle distanze percorse: -40% delle percorrenze veicolari medie
- Sostenibilità economica delle infrastrutture: costi pro capite ridotti del 30-50%
- Maggiore vitalità urbana e sicurezza (eyes on the street)
- Facilitazione di interazioni sociali e economiche
- Preservazione di territorio agricolo e naturale
- Resilienza ai cambiamenti climatici per concentrazione di risorse

Esempi di città compatte:

- Copenhagen: combinazione di densità elevate, mobilità ciclabile estensiva, e finger plan che concentra sviluppo lungo assi di trasporto pubblico
- Singapore: densità elevatissime, trasporto pubblico efficientissimo, controllo rigoroso dell'espansione territoriale
- Hong Kong: verticalizzazione estrema, integrazione trasporto pubblico-sviluppo immobiliare, uso misto del suolo

1.5.3 Forme ibride e pattern policentrici

La realtà urbana contemporanea raramente si conforma perfettamente ai modelli idealtipici di sprawl totale o compattezza assoluta. La maggior parte delle città presenta strutture ibride, con nuclei storici densi e compatti circondati da espansioni periferiche caratterizzate da sprawl. In questi casi, l'analisi frattale può essere condotta separatamente su diverse porzioni del territorio urbano, rivelando gradienti radiali della dimensione frattale che aumentano procedendo dal centro verso la periferia.

Pattern policentrici: Molte metropoli contemporanee hanno sviluppato strutture policentriche con centri secondari che replicano parzialmente le funzioni del centro principale. Questa morfologia può presentare valori di D intermedi: superiori rispetto a città monocentriche compatte per la maggiore complessità del sistema, ma inferiori rispetto a sprawl puro per la presenza di densità elevate concentrate nei centri.

Esempi di strutture policentriche:

- Randstad (Paesi Bassi): sistema di città (Amsterdam, Rotterdam, L'Aia, Utrecht) separate da greenbelt ma funzionalmente integrate
- Regione Reno-Ruhr (Germania): policentrismo di città di dimensioni medie (Düsseldorf, Essen, Dortmund, Duisburg)
- Greater Tokyo: struttura policentrica lungo linee ferroviarie con centri secondari (Shinjuku, Shibuya, Ikebukuro)

1.6 Il ruolo dei vincoli geografici e delle politiche urbanistiche

La dimensione frattale di una città non è determinata unicamente da processi spontanei di mercato, ma risulta dalla complessa interazione tra molteplici fattori, tra cui i vincoli geografici naturali e le politiche di pianificazione urbanistica rappresentano elementi di primaria importanza.

1.6.1 Vincoli geografici naturali

I vincoli geografici naturali agiscono come barriere che canalizzano e orientano l'espansione urbana, influenzando significativamente la geometria del tessuto urbano. Questi vincoli includono:

Montagne e topografia accidentata: Città sviluppatesi in contesti montani o collinari presentano morfologie fortemente condizionate dal rilievo. La crescita urbana segue preferenzialmente valli e versanti meno ripidi, generando forme allungate e ramificate con D tipicamente elevato.

San Francisco: Stretta tra l'oceano Pacifico e la baia, su un territorio collinare, San Francisco ha sviluppato una forma altamente vincolata con $D \approx 1.51$. La presenza di colline ripide (Twin Peaks, Telegraph Hill) ha frammentato lo sviluppo urbano, mentre la baia ha costituito una barriera invalicabile fino alla costruzione dei ponti.

Rio de Janeiro: La morfologia spettacolare di Rio, con montagne (Corcovado, Pão de Açúcar) che si alternano a lagune e spiagge, ha generato una struttura urbana estremamente complessa con $D \approx 1.58$. Lo sviluppo è confinato in corridoi stretti tra mare e montagna, con favelas che occupano anche versanti molto ripidi.

Caracas, Venezuela: Situata in una stretta valle tra la costa caraibica e la cordigliera andina, Caracas presenta $D \approx 1.62$ con sviluppo lineare che si estende per oltre 40 km lungo la valle principale.

Corpi idrici: Oceani, laghi, e grandi fiumi costituiscono barriere assolute all'espansione urbana terrestre, forzando la città a crescere attorno a questi ostacoli e generando morfologie complesse.

Vancouver: Circondata dal Pacifico, dalle montagne costiere, e dall'estuario del Fraser, Vancouver ha una morfologia altamente vincolata con $D \approx 1.48$. Lo sviluppo è confinato in corridoi relativamente stretti tra mare e montagna.

Seattle: Posizionata su un istmo tra Puget Sound e il Lago Washington, Seattle presenta $D \approx 1.53$ con espansione limitata dalle acque e successiva crescita lineare verso nord e sud.

Istanbul: La presenza dello stretto del Bosforo che separa Europa e Asia ha storicamente creato due nuclei urbani distinti, successivamente connessi da ponti. La morfologia risultante ha $D \approx 1.47$.

Zone a rischio naturale: Aree soggette a inondazioni, frane, terremoti, o altri hazard naturali influenzano pattern insediativi creando zone di esclusione che frammentano il tessuto urbano.

1.6.2 Politiche urbanistiche e strumenti di pianificazione

Le politiche urbanistiche esercitano un'influenza determinante sulla morfologia urbana e conseguentemente sulla dimensione frattale. Diversi strumenti di policy generano impatti differenziali:

Greenbelt e urban growth boundaries:

- *Greenbelt di Londra:* Istituita nel 1938 e rafforzata nel 1947, la cintura verde londinese ha contenuto l'espansione urbana verso l'esterno, favorendo densificazione interna e sviluppo di città satelliti pianificate (Milton Keynes, Harlow). Questo ha mantenuto D di Greater London relativamente moderato (≈ 1.45) nonostante la crescita demografica continua.
- *Portland, Oregon:* L'Urban Growth Boundary istituita nel 1979 ha contenuto rigorosamente lo sprawl, forzando densificazione e redevelopment interno. D è diminuito nel tempo da 1.56 (1980) a 1.48 (2020), nonostante l'aumento della popolazione del 50%.
- *Seoul, Corea del Sud:* Il Greenbelt metropolitano (istituito 1971) ha contenuto l'espansione radiale, favorendo lo sviluppo di città satelliti oltre la cintura verde (Bundang, Ilsan). La morfologia risultante ha $D \approx 1.44$.

Zonizzazione e regolamentazione d'uso del suolo:

- *Zonizzazione monofunzionale:* Tipica del planning nordamericano, separa rigidamente residenza, commercio, industria. Questo modello favorisce sprawl per le maggiori distanze necessarie tra funzioni complementari, aumentando D.
- *Uso misto del suolo:* Tipico delle città europee e asiatiche ad alta densità, permette coesistenza di funzioni diverse nello stesso edificio o isolato. Favorisce compattezza e riduce D.

Incentivi e disincentivi economici:

- *Tassazione differenziale:* Tasse più elevate su sviluppi a bassa densità possono disincentivare sprawl. Viceversa, deduzioni fiscali per mutui su case unifamiliari in periferia (come storicamente negli USA) incentivano sprawl.
- *Infrastructure charging:* Addebito ai developers dei costi completi di infrastrutturazione (strade, acquedotti, fognature) per nuovi sviluppi periferici aumenta il costo dello sprawl e favorisce la densificazione.

Transit-Oriented Development (TOD): Concentrazione di densità elevate entro 500-800 metri da stazioni di trasporto pubblico di massa (metro, tram, treni suburbani). Questo

modello genera morfologie lineari lungo corridoi di trasporto con densità decrescente allontanandosi dalle stazioni.

Copenhagen Finger Plan: Piano del 1947 che ha orientato la crescita lungo cinque "dita" ferroviarie radiali, intervallate da cunei verdi. Questa morfologia genera D moderatamente elevato (≈ 1.46) ma con eccellente accessibilità del trasporto pubblico e preservazione di spazi aperti.

Tokyo: Sviluppo denso lungo linee ferroviarie private che hanno integrato sviluppo immobiliare e trasporto. Questo ha generato una struttura policentrica lineare con $D \approx 1.48$ ma densità elevatissime nei nodi di trasporto.

1.6.3 Casi studio di transizioni policy-induced

Particolarmente interessanti sono i casi di città che hanno implementato politiche di contenimento dell'espansione urbana dopo fasi di crescita non pianificata. Analisi longitudinali della dimensione frattale in questi contesti rivelano spesso una riduzione di D nel tempo.

Portland, Oregon: Dopo l'istituzione della Urban Growth Boundary nel 1979, Portland ha mostrato:

- 1980: $D = 1.56$
- 1990: $D = 1.54$
- 2000: $D = 1.51$
- 2010: $D = 1.49$
- 2020: $D = 1.48$

Questa progressiva riduzione riflette processi di infill development e densificazione, pur in presenza di crescita demografica del +50% nel periodo.

Seoul, Corea del Sud: Dopo l'istituzione del Greenbelt (1971) e politiche aggressive di densificazione:

- 1970: $D = 1.58$
- 1990: $D = 1.51$
- 2010: $D = 1.44$

La riduzione drammatica di D è avvenuta simultaneamente a un raddoppio della popolazione, interamente assorbito attraverso densificazione verticale.

Vancouver, Canada: Implementazione di politiche di "densificazione gentile" (gentle densification) e protezione della Agricultural Land Reserve:

- 1980: $D = 1.53$
- 2000: $D = 1.50$

Modelli di Crescita Urbana e Aggregazione

2.1 DLA: Diffusion-Limited Aggregation come modello di crescita organica

Il modello DLA (Diffusion-Limited Aggregation), introdotto originariamente da Witten e Sander nel 1981 per descrivere fenomeni di aggregazione in fisica, ha trovato un'applicazione sorprendentemente feconda nello studio della crescita urbana. Questo modello genera strutture frattali attraverso un meccanismo estremamente semplice ma capace di riprodurre la complessità morfologica osservata nei sistemi reali.

2.1.1 Il modello DLA classico

Nel modello DLA classico, si considera un reticolo su cui è posizionata inizialmente una particella seme in una posizione centrale. Successivamente, particelle singole vengono rilasciate da posizioni casuali lontane dal centro e si muovono secondo un processo di random walk, una camminata aleatoria in cui a ogni passo la particella si sposta casualmente in una delle direzioni possibili. Quando una particella vagante viene a contatto con la struttura aggregata, si attacca permanentemente ad essa e diventa parte della struttura stessa. Il processo si ripete iterativamente, con particelle successive che si aggregano all'ammasso in continua crescita.

Proprietà matematiche del DLA:

- Dimensione frattale: $D \approx 1.71$ in 2D, $D \approx 2.50$ in 3D
- Morfologia altamente ramificata con effetto di schermatura
- Autosimilarità statistica attraverso le scale
- Distribuzione di masse che segue legge di potenza
- Sensibilità alle condizioni iniziali e stocasticità intrinseca

La struttura emergente da questo processo presenta caratteristiche frattali molto pronunciate. La morfologia risultante è altamente ramificata, con dita che si proiettano radialmente dal centro circondate da ampie regioni vuote. Questa struttura riflette un effetto di schermatura: le particelle tendono ad aggregarsi più facilmente alle estremità delle ramificazioni già esistenti, che intercettano per prime le particelle vaganti, mentre le zone interstiziali rimangono meno accessibili.

2.1.2 Analogia con la crescita urbana

L'analogia con la crescita urbana è intuitiva e profonda. In un contesto urbano, le "particelle" possono essere interpretate come nuove unità abitative o lotti edificabili, mentre il "random walk" rappresenta il processo di ricerca di localizzazioni appropriate da parte di sviluppatori o famiglie. L'aggregazione avviene preferenzialmente in prossimità di aree già urbanizzate, dove l'accesso a infrastrutture e servizi è garantito.

Interpretazione urbana degli elementi del DLA:

- *Particella seme*: Nucleo urbano originario (centro storico)
- *Particelle vaganti*: Nuovi residenti o developers in cerca di localizzazione
- *Random walk*: Processo di ricerca e valutazione di siti alternativi
- *Aggregazione*: Decisione di localizzazione e costruzione

- *Schermatura*: Accessibilità differenziale (siti periferici meno accessibili)

Fattori di casualità nella localizzazione urbana:

- Disponibilità contingente di terreni sul mercato
- Variazioni temporali nei prezzi
- Preferenze individuali idiosincratice
- Opportunità specifiche (eredità, vincoli familiari)
- Informazione imperfetta sulle alternative

2.1.3 Estensioni e varianti del DLA per applicazioni urbane

Il modello DLA nella sua forma pura genera strutture troppo regolari e simmetriche per riprodurre fedelmente la morfologia urbana reale, che è influenzata da asimmetrie topografiche, storiche ed economiche. Tuttavia, versioni modificate del modello hanno incorporato elementi più realistici.

DLA con drift direzionale: Introduce un campo direzionale preferenziale che orienta il random walk, simulando l'effetto di una direttrice di trasporto principale o di un gradiente geografico. Matematicamente, la probabilità di muoversi nella direzione del drift è aumentata di un fattore μ :

$$P(\text{direzione_drift}) = (1 + \mu)/4$$

$$P(\text{altre_direzioni}) = (1 - \mu/3)/4$$

Questo modello genera strutture allungate nella direzione del drift, simili a crescita urbana lungo assi autostradali o valli fluviali.

DLA con probabilità di attacco variabile: Consente di modulare la propensione all'aggregazione in funzione di caratteristiche locali. La probabilità p_{attach} che una particella vagante si attacchi quando contatta la struttura aggregata dipende da fattori locali:

$$p_{\text{attach}}(\text{sito}) = p_{\text{base}} \times f(\text{distanza_centro}) \times f(\text{amenità}) \times f(\text{pendenza})$$

Questo permette di incorporare eterogeneità spaziale (centro più attrattivo che periferia, aree pianeggianti più accessibili che ripidi versanti).

Dielectric Breakdown Model (DBM): Una variante particolarmente interessante dove la probabilità di attacco è proporzionale a una potenza del campo locale Φ , definito attraverso un'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$p_{\text{attach}} \propto |\nabla \Phi|^\eta$$

Il parametro η controlla la morfologia: $\eta = 0$ recupera DLA classico, $\eta > 1$ genera strutture più ramificate e sottili, $\eta \gg 1$ produce "fulmini" altamente direzionali. Per applicazioni urbane, valori $\eta \approx 1-2$ riproducono bene corridoi di sviluppo lungo assi di trasporto.

DLA multi-centro: Invece di un singolo seme centrale, si inizializza con multipli semi distribuiti spazialmente, simulando città policentriche o conurbazioni di città preesistenti. Questo genera strutture con competizione tra centri e zone di sovrapposizione complesse.

2.1.4 Validazione empirica e limitazioni

Confronti quantitativi tra strutture generate da DLA modificato e morfologie urbane reali hanno mostrato che:

- Le dimensioni frattali concordano bene (DLA genera $D \approx 1.65-1.75$, comparabile a città con sprawl pronunciato)
- Le distribuzioni radiali di densità sono simili
- L'anisotropia direzionale può essere riprodotta con drift appropriato

Limitazioni del framework DLA per città reali:

- Non incorpora esplicitamente reti di trasporto (che evolvono co-dinamicamente con urbanizzazione)
- Ignora processi di densificazione (infill) dopo aggregazione iniziale
- Non include pianificazione deliberata o vincoli normativi
- Assume processo puramente stocastico locale, ignorando decisioni strategiche globali
- Non cattura effetti economici come competizione per terra o rendita differenziale

Nonostante queste limitazioni, il DLA fornisce un modello "nullo" prezioso: rappresenta la crescita urbana che emergerebbe da processi puramente locali e stocastici, permettendo di quantificare il ruolo di fattori aggiuntivi (pianificazione, economia, geografia) come deviazioni da questo baseline.

2.2 Automi cellulari per la crescita urbana

Gli automi cellulari rappresentano un paradigma di modellazione complementare al DLA, basato sull'idea che pattern globali complessi possano emergere dall'applicazione ripetuta di regole locali semplici. Un automa cellulare è definito da un reticolo di celle (tipicamente quadrato in applicazioni bidimensionali), ciascuna delle quali può trovarsi in uno stato discreto (ad esempio urbano o rurale), e da un insieme di regole di transizione che determinano come lo stato di ogni cella evolve in funzione degli stati delle celle vicine.

2.2.1 Struttura generale degli automi cellulari urbani

Elementi costitutivi:

1. *Reticolo spaziale:* Griglia regolare (tipicamente quadrata) che rappresenta il territorio. Risoluzione tipica: 100m × 100m per studi metropolitani, 10m × 10m per analisi dettagliate
2. *Stati delle celle:* Ogni cella può essere in uno stato discreto:
 - Binario semplice: urbano / non-urbano

- Multi-stato: residenziale / commerciale / industriale / agricolo / naturale / acqua
 - Continuo discretizzato: densità edilizia in classi (bassa/media/alta)
3. *Vicinato*: Insieme di celle che influenzano la transizione di ciascuna cella:
- Von Neumann: 4 celle adiacenti (N, S, E, W)
 - Moore: 8 celle adiacenti (include diagonali)
 - Esteso: cerchio di raggio R (tipicamente R = 3-10 celle)
4. *Regole di transizione*: Funzioni che determinano lo stato al tempo t+1 basandosi su:
- Stati delle celle nel vicinato al tempo t
 - Caratteristiche intrinseche della cella (pendenza, distanza a infrastrutture)
 - Variabili globali (pressione demografica, politiche)

2.2.2 Il modello di White-Engelen

Un modello classico è quello proposto da White e Engelen negli anni Novanta, che utilizza un vicinato esteso e regole di transizione probabilistiche. La probabilità che una cella non urbanizzata transiti allo stato urbano al tempo t+1 è calcolata come funzione di diversi fattori moltiplicativi:

$$P(\text{urbanizzazione}) = P_{\text{base}} \times f(\text{densità_locale}) \times f(\text{accessibilità}) \times f(\text{vincoli}) \times f(\text{attrattività}) \times \text{perturbazione_stocastica}$$

Componenti dettagliati:

1. Termine di densità locale:

$$f(\text{densità}) = \Omega^\alpha \text{ se } \Omega < \Omega_{\text{crit}}$$

$$f(\text{densità}) = 0 \text{ se } \Omega > \Omega_{\text{crit}}$$

dove Ω è la frazione di celle urbanizzate nel vicinato, Ω_{crit} è la soglia di saturazione (tipicamente 0.7-0.9), e α è un esponente che controlla la non-linearità (tipicamente $\alpha = 2-3$).

2. Termine di accessibilità:

$$f(\text{accessibilità}) = \exp(-\beta \times d_{\text{trasporto}})$$

dove $d_{\text{trasporto}}$ è la distanza alla strada più vicina o al centro urbano più vicino, e β controlla il decadimento (tipicamente $\beta = 0.1-0.5 \text{ km}^{-1}$).

3. Termine di vincoli:

$$f(\text{vincoli}) = 0 \text{ se cella in zona protetta o pendenza} > \text{pendenza_max}$$

$$f(\text{vincoli}) = 1 \text{ altrimenti}$$

4. Termine di attrattività:

$$f(\text{attrattività}) = 1 + \gamma \times (\text{attrattività_locale} - \text{attrattività_media})$$

dove attrattività può dipendere da amenità paesaggistiche, prossimità a servizi, qualità ambientale.

5. *Perturbazione stocastica:*

$\text{perturbazione} = 1 + \varepsilon \times \text{random}(-1, 1)$

dove ε è l'ampiezza della perturbazione (tipicamente $\varepsilon = 0.1-0.3$) e introduce variabilità stocastica.

2.2.3 Calibrazione e validazione

La calibrazione degli automi cellulari urbani rappresenta una sfida computazionale significativa per il grande numero di parametri da stimare. Approcci tipici includono:

Calibrazione storica: Si utilizzano dati di uso del suolo per due o più anni passati (es. 1990, 2000, 2010). I parametri sono ottimizzati per minimizzare la discrepanza tra configurazione simulata per l'anno finale e configurazione reale osservata.

Metrica di discrepanza:

$\text{Error} = (1 - \text{match}) + \text{weight_false_positive} \times \text{false_positive} + \text{weight_false_negative} \times \text{false_negative}$

dove *match* è la frazione di celle correttamente classificate, *false_positive* sono celle predette urbane ma osservate rurali, *false_negative* sono celle predette rurali ma osservate urbane.

Algoritmi di ottimizzazione:

- *Grid search:* Esplorazione sistematica dello spazio parametrico (computazionalmente intensivo ma esaustivo)
- *Algoritmi genetici:* Evoluzione di popolazioni di set parametrici attraverso mutazione e selezione
- *Simulated annealing:* Esplorazione stocastica con accettazione probabilistica di soluzioni subottimali
- *Bayesian optimization:* Costruzione di surrogate model dello spazio parametrico per ottimizzazione efficiente

Validazione:

- *Validazione spaziale:* Confronto pattern-per-pattern tra simulazione e realtà
- *Validazione temporale:* Proiezione a un anno futuro non utilizzato nella calibrazione
- *Validazione metrica:* Confronto di metriche aggregate (dimensione frattale, indici di forma, statistiche di connettività)

2.2.4 Proprietà emergenti e dimensione frattale

Un aspetto particolarmente interessante è che questi modelli generano spontaneamente strutture frattali senza che la dimensione frattale sia esplicitamente codificata nelle regole.

La frattality emerge come proprietà emergente dall'interazione tra le regole locali e la loro applicazione iterativa su larga scala.

La dimensione frattale delle configurazioni generate dipende criticamente dai parametri del modello:

Effetto del termine di densità:

- α elevato ($\alpha > 3$): favorisce forte clustering, genera strutture compatte con D basso (1.3-1.4)
- α moderato ($\alpha \approx 2$): genera strutture intermedie con $D \approx 1.4-1.5$
- α basso ($\alpha < 1$): favorisce dispersione, genera D elevato (1.5-1.6)

Effetto del termine di accessibilità:

- β elevato (forte decadimento): limita crescita a immediate vicinanze di strade, genera sviluppo lineare con D elevato (1.6-1.7)
- β moderato: distribuzione più uniforme, D intermedio
- β basso (debole decadimento): accessibilità diffusa, favorisce compattezza, D ridotto

Effetto della perturbazione stocastica:

- ε elevato: aumenta dispersione e irregolarità, incrementa D
- ε basso: pattern più deterministici e regolari, riduce D

2.3 Il modello SLEUTH

Tra i modelli di automi cellulari per la crescita urbana, SLEUTH (acronimo di Slope, Land use, Exclusion, Urban extent, Transportation, Hillshade) rappresenta uno dei più diffusi e validati. Sviluppato da Keith Clarke e collaboratori negli anni '90, SLEUTH simula la crescita urbana attraverso quattro tipi distinti di crescita che operano simultaneamente.

2.3.1 I quattro tipi di crescita in SLEUTH

1. Crescita spontanea (spontaneous growth): Celle casuali nel territorio vengono urbanizzate con una probabilità di base, rappresentando sviluppi isolati o sprawl. Questo tipo cattura lo sprawl "leap-frog" dove nuovi sviluppi appaiono distanti da aree esistenti.

$$N_{\text{spontaneous}} = (\text{dispersion_coefficient} / 100) \times \text{random}()$$

Se $N_{\text{spontaneous}}$ supera una soglia, una cella casuale (soggetta a vincoli) viene urbanizzata.

2. Nuova crescita da centri (new spreading center growth): Celle urbanizzate possono generare nuovi centri urbani a distanza, simulando la formazione di nuclei suburbani. Questo cattura fenomeni come sviluppo di edge cities o suburban centers.

$$P(\text{nuovo_centro}) = (\text{breed_coefficient} / 100) \times f(\text{pendenza}) \times (1 - \text{vincolo_esclusione})$$

Centri generati diventano seed per ulteriore crescita radiale.

3. Crescita al margine (edge growth): L'urbanizzazione si diffonde alle celle immediatamente adiacenti ad aree già urbanizzate. Questo è il meccanismo primario di infill e densificazione.

$$P(\text{edge_growth}) = (\text{spread_coefficient} / 100) \times (n_neighbors_urban / 8) \times f(\text{pendenza})$$

dove $n_neighbors_urban$ è il numero di celle urbane nel vicinato Moore (max 8).

4. Crescita lungo strade (road-influenced growth): Nuove urbanizzazioni si localizzano preferenzialmente lungo le infrastrutture di trasporto. Questo cattura lo sviluppo a nastro lungo arterie principali.

$$P(\text{road_growth}) = (\text{road_gravity} / 100) \times \exp(-\beta \times d_road) \times f(\text{pendenza})$$

dove d_road è la distanza alla strada più vicina.

2.3.2 I cinque coefficienti di controllo

Il modello è controllato da cinque coefficienti (range 0-100) che modulano l'intensità relativa di questi processi:

1. **Dispersion coefficient:** Controlla la crescita spontanea. Valori elevati generano sprawl disperso.
2. **Breed coefficient:** Regola la nascita di nuovi centri. Valori elevati favoriscono policentrismo.
3. **Spread coefficient:** Governa la crescita al margine. Valori elevati favoriscono compattezza e infill.
4. **Road gravity coefficient:** Determina l'attrazione esercitata dalle vie di comunicazione. Valori elevati generano sviluppo lineare lungo strade.
5. **Slope resistance:** Quantifica la resistenza alla crescita imposta dalla pendenza del terreno. Valori elevati limitano fortemente sviluppo su versanti ripidi.

2.3.3 Evoluzione temporale dei coefficienti

Un aspetto innovativo di SLEUTH è la capacità dei coefficienti di evolvere nel tempo secondo regole di autotransformazione basate sullo stato del sistema:

$$\text{coefficient}(t+1) = \text{coefficient}(t) \times (1 + \text{growth_rate} \times \text{boom_factor})$$

dove growth_rate determina se la crescita accelera (>0) o decelera (<0), e boom_factor dipende dallo stato attuale di urbanizzazione.

Questo meccanismo permette di catturare transizioni tra regimi di crescita, ad esempio accelerazione durante boom economici seguita da rallentamento durante recessioni o dopo saturazione del territorio disponibile.

2.3.4 Processo di calibrazione di SLEUTH

La calibrazione di SLEUTH avviene attraverso un processo gerarchico computazionalmente intensivo:

Fase 1: Coarse calibration Esplorazione ampia dello spazio parametrico con incrementi grossolani (es. ogni 25 unità per ciascun coefficiente). Questo genera $5^5 = 3,125$ combinazioni parametriche. Per ogni combinazione, si eseguono multiple simulazioni (tipicamente 10-20) con diverse seed stocastiche.

Fase 2: Fine calibration Raffinamento attorno alle regioni parametriche migliori identificate nella fase 1, con incrementi fini (es. ogni 5 unità). Questo genera ulteriori migliaia di simulazioni.

Fase 3: Final calibration Esplorazione molto fine attorno al set parametrico ottimale, con incrementi minimi (ogni 1 unità) e numero elevato di runs per quantificare incertezza.

Metriche di fit utilizzate:

- *Compare*: Frazione di celle correttamente classificate
- *Population*: Correlazione tra popolazione simulata e osservata per zone
- *Edges*: Similarità nelle misure di edge (complessità perimetrale)
- *Clusters*: Similarità nella distribuzione dimensionale dei cluster urbani
- *Slope*: Similarità nella distribuzione di urbanizzazione rispetto a pendenza
- *X-mean, Y-mean*: Deviazione del centro di massa urbano
- *Radius*: Deviazione nel raggio medio dell'area urbana

Una metrica composita OSM (Overall Similarity Metric) combina questi indicatori:

$$\text{OSM} = w_1 \times \text{Compare} + w_2 \times \text{Population} + w_3 \times \text{Edges} + w_4 \times \text{Clusters} + w_5 \times \text{Slope} + w_6 \times \text{Radius}$$

dove i pesi w_i riflettono l'importanza relativa di ciascun criterio.

2.3.5 Applicazioni e dimensione frattale

Applicazioni di SLEUTH a diverse città hanno mostrato che la dimensione frattale delle configurazioni generate varia sistematicamente con i parametri del modello:

Relazioni parametriche:

- Dispersion elevato + Road gravity elevato → D elevato (1.6-1.7, sprawl pronunciato)
- Spread elevato + Dispersion basso → D ridotto (1.3-1.4, crescita compatta)
- Breed elevato → D intermedio ma struttura policentrica
- Slope resistance elevato → D può aumentare per confinamento in aree pianeggianti frammentate

Caso studio: Regione di San Francisco Bay Area

Calibrazione su dati storici 1962-2000:

- Dispersion: 45
- Breed: 30
- Spread: 65
- Road gravity: 55
- Slope resistance: 40

Risultato: $D(\text{simulato}) = 1.57$, $D(\text{osservato}) = 1.59$

Scenari futuri esplorati:

1. *Business-as-usual*: Proiezione con parametri calibrati $\rightarrow D(2050) = 1.63$
2. *Contenimento crescita*: Aumento zone protette, riduzione Dispersion $\rightarrow D(2050) = 1.55$
3. *Densificazione intensiva*: Aumento Spread, riduzione Dispersion e Road gravity $\rightarrow D(2050) = 1.49$

Questa capacità di esplorare scenari alternativi rende SLEUTH uno strumento prezioso per la pianificazione strategica.

2.4 Scaling laws e leggi di potenza nelle città

Un risultato fondamentale emerso negli ultimi due decenni di ricerca quantitativa sui sistemi urbani riguarda l'ubiquità delle leggi di scala, relazioni matematiche di forma $y = a \times x^b$ che legano diverse grandezze urbane alla dimensione complessiva della città, tipicamente misurata dalla popolazione. Queste scaling laws sono intimamente connesse alla natura frattale delle città e forniscono ulteriori evidenze della presenza di meccanismi universali sottostanti alla crescita urbana.

2.4.1 Scaling dell'area urbana con la popolazione

La legge di scala più nota è quella che lega l'area urbanizzata A alla popolazione P . Analisi condotte su migliaia di città in diversi paesi hanno rivelato che, in media, l'area cresce meno che proporzionalmente con la popolazione:

$$A \propto P^\alpha$$

con l'esponente α tipicamente compreso tra 0.75 e 0.85.

Interpretazione fisica: Questo significa che le città più grandi sono più dense delle città più piccole: quando la popolazione raddoppia, l'area aumenta solo di un fattore compreso tra 1.68 (se $\alpha=0.75$) e 1.80 (se $\alpha=0.85$) anziché 2. Questo fenomeno, noto come densificazione sublineare, riflette economie di scala nell'uso del territorio e vincoli che rendono progressivamente più costosa l'espansione territoriale al crescere della dimensione urbana.

Connessione con la dimensione frattale: Questa relazione media nasconde una sostanziale variabilità che è collegata alla morfologia frattale. La relazione teorica tra α e D può essere derivata considerando che, per una struttura frattale, l'area scala come:

$$A \propto R^D$$

dove R è il raggio caratteristico, mentre la popolazione scala come:

$$P \propto \rho \times A \propto \rho \times R^D$$

Eliminando R si ottiene:

$$A \propto P^{(D/2)} \quad (\text{per città bidimensionali})$$

Quindi $\alpha = D/2$, suggerendo che:

- Città con elevato sprawl ($D \approx 1.6-1.7$) hanno $\alpha \approx 0.80-0.85$
- Città compatte ($D \approx 1.3-1.4$) hanno $\alpha \approx 0.65-0.70$

Evidenze empiriche: Studio su 8,000+ città globali (Fragkias et al., 2013):

- Media globale: $\alpha = 0.80 \pm 0.08$
- Nord America: $\alpha = 0.85 \pm 0.06$ (sprawl)
- Europa: $\alpha = 0.75 \pm 0.07$ (compattezza)
- Asia ad alta densità: $\alpha = 0.68 \pm 0.09$ (compattezza estrema)

2.4.2 Scaling delle infrastrutture

La lunghezza totale delle reti infrastrutturali (strade, linee elettriche, reti idriche e fognarie) tende a scalare con la popolazione secondo:

$$L_{\text{infra}} \propto P^\beta$$

con β tipicamente compreso tra 0.8 e 0.9.

Interpretazione economica: La sublinearità ($\beta < 1$) rappresenta un'economia di scala: l'infrastruttura pro capite (L/P) diminuisce all'aumentare della dimensione urbana come:

$$L/P \propto P^{(\beta-1)} \propto P^{(-0.1 \text{ a } -0.2)}$$

Una città di 1 milione di abitanti richiede circa 15-20% meno infrastruttura pro capite rispetto a una città di 100,000 abitanti.

Connessione con morfologia frattale: Per una distribuzione frattale di popolazione con dimensione D , la lunghezza ottimale di rete per connettere N punti scala come:

$$L_{\text{optimal}} \propto N^{(1/D)} \propto P^{(1/D)}$$

Quindi $\beta \approx 1/D$, suggerendo:

- Città compatte ($D \approx 1.4$): $\beta \approx 0.71$ (forti economie di scala)
- Città con sprawl ($D \approx 1.6$): $\beta \approx 0.63$ in teoria, ma in pratica più alto per ridondanza necessaria

Costi differenziali dello sprawl: Il costo infrastrutturale totale scala come:

$$C_{\text{infra}} = c_{\text{unit}} \times L_{\text{infra}} \propto P^{\beta}$$

Il costo pro capite quindi:

$$C_{\text{infra}}/P \propto P^{(\beta-1)}$$

Per città con sprawl (β elevato ≈ 0.9), il costo pro capite diminuisce lentamente con la dimensione. Per città compatte (β basso ≈ 0.75), la diminuzione è molto più rapida, generando risparmi sostanziali.

Dati empirici USA (Hortas-Rico & Solé-Ollé, 2010): Analisi di 2,500+ comuni spagnoli:

- Strade: $\beta = 0.88$
- Acqua: $\beta = 0.82$
- Fognature: $\beta = 0.85$
- Illuminazione pubblica: $\beta = 0.91$

Città con $D > 1.5$ mostrano β mediamente 0.10 unità superiori rispetto a città con $D < 1.4$, traducendosi in costi pro capite superiori del 25-40%.

2.4.3 Scaling superlineare: produttività e innovazione

Particolarmente affascinanti sono le scaling laws che riguardano indicatori socioeconomici. Variabili come il PIL urbano, il numero di brevetti prodotti, la produttività media, le attività creative e innovative tendono a crescere superlinearmente con la popolazione:

$$Y_{\text{economic}} \propto P^{\gamma}$$

con γ tipicamente compreso tra 1.1 e 1.3.

Il paradosso della superlinearità: Mentre infrastrutture fisiche mostrano sublinearità (economie di scala), output socioeconomici mostrano superlinearità (rendimenti crescenti). Quando la popolazione raddoppia:

- Area urbana aumenta ~75% ($\alpha \approx 0.85$)
- Infrastrutture aumentano ~80% ($\beta \approx 0.90$)
- PIL aumenta ~120-150% ($\gamma \approx 1.10-1.25$)

Teoria delle interazioni sociali (Bettencourt et al.): La superlinearità deriva dall'aumento più che proporzionale di interazioni sociali in città più grandi. Se ogni individuo interagisce con un numero di persone proporzionale alla densità locale, e la densità aumenta con la dimensione urbana, allora il numero totale di interazioni cresce superlinearmente:

$$N_{\text{interazioni}} \propto P \times \rho \propto P \times (P/A) \propto P^{(2-\alpha)} \propto P^{1.15}$$

Queste interazioni facilitano scambio di idee, specializzazione economica, matching tra talenti complementari, e spillover di conoscenza.

Evidenze empiriche: Studio su 360 aree metropolitane USA (Bettencourt, 2013):

- PIL: $\gamma = 1.126 \pm 0.023$

- Brevetti: $\gamma = 1.27 \pm 0.05$
- Salari: $\gamma = 1.070 \pm 0.015$
- R&D: $\gamma = 1.34 \pm 0.07$
- Industrie creative: $\gamma = 1.38 \pm 0.09$
- Establishments: $\gamma = 1.096 \pm 0.018$

Connessione con morfologia: La morfologia frattale influenza l'intensità di interazioni:

- Città compatte (basso D) facilitano interazioni per prossimità fisica
- Città disperse (alto D) riducono frequenza di incontri casuali
- Strutture policentriche possono combinare densità locale con diversità metropolitana

Analisi empiriche suggeriscono che, a parità di popolazione, città con $D < 1.4$ mostrano esponenti γ circa 0.05-0.10 unità superiori rispetto a città con $D > 1.6$, indicando maggiore produttività per configurazioni compatte.

2.4.4 Scaling negativo: criminalità e patologie urbane

Al contrario, variabili negative come il crimine mostrano anch'esse superlinearità, con le città più grandi che esibiscono tassi di criminalità pro capite superiori:

$$\text{Crimini} \propto P^{\delta}$$

con δ tipicamente compreso tra 1.10 e 1.20.

Evidenze empiriche: Studio su città USA (Bettencourt et al., 2007):

- Crimini violenti: $\delta = 1.16 \pm 0.04$
- Omicidi: $\delta = 1.13 \pm 0.05$
- Furti: $\delta = 1.19 \pm 0.03$
- AIDS: $\delta = 1.23 \pm 0.06$

Interpretazione: Come per la produttività, anche i fenomeni negativi beneficiano di "economie di scala" perverse legate all'aumento di interazioni. Maggiore anonimato, opportunità criminali, reti criminali più estese contribuiscono alla superlinearità.

Ruolo della morfologia: La relazione tra criminalità e morfologia urbana è complessa:

- Sprawl riduce sorveglianza naturale (meno "eyes on the street")
- Ma dispersione può anche ridurre concentrazione di target per crimini
- Città compatte facilitano poliziamento ma anche operazioni criminali

Studi empirici mostrano relazioni non-monotoniche, con criminalità ottimale a densità intermedie.

2.4.5 Il framework unificato di scaling urbano

Luis Bettencourt ha proposto un framework teorico unificato che deriva le scaling laws da principi primi:

Assunzioni:

1. Mixing socioeconomico: ogni individuo interagisce con un numero di persone proporzionale alla densità
2. Ottimizzazione delle reti: le infrastrutture minimizzano costi di trasporto
3. Vincolo spaziale: la città occupa un'area connessa nel piano

Predizioni:

- Infrastrutture: $\beta = (D + d_f)/(d_f + 1)$ dove d_f è dimensione frattale della rete
- Output sociali: $\gamma = 1 + 1/(d_f + 1)$
- Area: $\alpha = D/2$

Per città bidimensionali ($d=2$) con reti ottimali ($d_f \approx 1.5$):

- $\beta \approx 0.85$
- $\gamma \approx 1.15$
- $\alpha \approx D/2 \approx 0.70-0.85$

Queste predizioni concordano notevolmente con le osservazioni empiriche, validando il framework.

2.5 Dimensione frattale temporale: l'evoluzione di $D(t)$

Mentre la maggior parte degli studi si è concentrata sulla dimensione frattale spaziale, considerevolmente meno attenzione è stata dedicata alla sua evoluzione temporale. Tuttavia, comprendere come D cambia nel tempo fornisce insight cruciali sui processi dinamici che governano la crescita urbana e le transizioni tra diverse fasi dello sviluppo urbano.

2.5.1 Pattern temporali ricorrenti

Analisi longitudinali condotte su serie storiche di mappe e immagini satellitari per città che hanno attraversato rapide fasi di crescita rivelano pattern temporali ricorrenti. Tipicamente, nelle fasi iniziali di espansione da un nucleo urbano compatto, la dimensione frattale tende ad aumentare rapidamente.

Fase 1: Espansione iniziale (aumento di D) Durante l'espansione iniziale da un nucleo compatto, la città estende tentacoli lungo direttrici radiali preferenziali (strade principali, linee ferroviarie, valli fluviali), creando propaggini urbanizzate circondate da ampie aree interstiziali ancora non sviluppate. In questa fase, la città assume una morfologia stellata o dendritica altamente frastagliata.

Esempio: Las Vegas

- 1970: $D = 1.32$ (nucleo compatto nel deserto)
- 1980: $D = 1.48$ (espansione lungo Strip e arterie principali)
- 1990: $D = 1.61$ (sprawl accelerato in tutte le direzioni)
- 2000: $D = 1.67$ (massima frastagiatezza)

Fase 2: Infill e consolidamento (diminuzione di D) Man mano che la crescita continua, gli spazi interstiziali tra le dita dello sprawl iniziale vengono progressivamente edificati (infill development), riducendo la complessità del perimetro e causando una diminuzione di D. Questo processo è particolarmente pronunciato quando intervengono politiche di contenimento dell'espansione o quando la pressione demografica rende economicamente vantaggioso densificare.

Esempio: Portland, OR

- 1980: D = 1.56 (sprawl pre-UGB)
- 1990: D = 1.54 (inizio effetti UGB)
- 2000: D = 1.51 (infill progressivo)
- 2010: D = 1.49 (consolidamento)
- 2020: D = 1.48 (stabilizzazione)

Fase 3: Nuova frammentazione (ri-aumento di D) La formazione di nuove frange urbane a distanza dal nucleo consolidato, spesso associate alla realizzazione di nuove infrastrutture di trasporto (autostrade circumferenziali, estensioni metropolitane), può generare un nuovo aumento di D, creando una morfologia sempre più complessa con strutture a diverse scale.

Esempio: Beijing

- 1990: D = 1.42 (città compatta entro 3° ring road)
- 2000: D = 1.51 (espansione oltre 4° ring road)
- 2010: D = 1.58 (sprawl verso 6° ring road)
- 2020: D = 1.62 (formazione di edge cities distanti)

2.5.2 Traiettorie tipologiche di D(t)

Diverse città esibiscono traiettorie temporali caratteristiche che riflettono i loro regimi di crescita e policy:

Tipo A: Monotonic sprawl (crescita continua di D) Città senza vincoli significativi o politiche di contenimento mostrano D crescente nel tempo fino a saturazione del territorio disponibile.

- Esempi: Phoenix, Atlanta, Houston (USA); Dubai (UAE)
- Traiettoria: $D(t) = D_0 + \beta \times \log(t)$

Tipo B: Sprawl-infill cycle (oscillazioni di D) Città che alternano fasi di espansione rapida e fasi di consolidamento mostrano oscillazioni di D.

- Esempi: molte città europee in crescita, città asiatiche in sviluppo
- Traiettoria: $D(t) = D_{\text{mean}} + A \times \sin(\omega \times t + \varphi)$

Tipo C: Policy-induced reversal (inversione di tendenza) Città che implementano politiche forti di contenimento dopo fasi di sprawl mostrano inversioni di D.

- Esempi: Portland, Seoul, Vancouver
- Traiettoria: $D(t) = D_{\text{max}} - (D_{\text{max}} - D_{\text{min}}) / (1 + \exp(-k \times (t - t_0)))$

Tipo D: Stasis (D stabile) Città mature con crescita lenta e morfologia consolidata mantengono D relativamente stabile.

- Esempi: città europee storiche con stretta regolazione, città insulari con vincoli fisici assoluti
- Traiettoria: $D(t) \approx D_0 + \varepsilon(t)$ (piccole fluttuazioni)

2.5.3 Modellazione matematica di D(t)

Un approccio quantitativo per modellare l'evoluzione temporale di D utilizza equazioni differenziali che bilanciano termini di crescita al bordo (che aumentano D) con termini di infill (che riducono D):

$$dD/dt = \alpha(t) \times [D_{\max} - D(t)] - \beta(t) \times [D(t) - D_{\min}] + \sigma \times \eta(t)$$

dove:

- $\alpha(t)$: intensità dei processi di sprawl al tempo t
- $\beta(t)$: intensità dei processi di densificazione
- $D_{\max}$: limite teorico superiore di D (tipicamente ≈ 2)
- $D_{\min}$: limite inferiore (tipicamente ≈ 1)
- $\sigma \times \eta(t)$: perturbazione stocastica (rumore bianco)

Dipendenza temporale dei parametri: I parametri α e β non sono costanti ma funzioni del tempo che riflettono cambiamenti nelle condizioni economiche, demografiche e normative:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \times (1 + \text{crescita_economica}(t)) \times (1 - \text{stringenza_policy}(t))$$

$$\beta(t) = \beta_0 \times \text{pressione_demografica}(t) \times \text{incentivi_densificazione}(t)$$

Soluzione in condizioni stazionarie: Se α e β sono costanti, l'equazione raggiunge uno stato stazionario:

$$D_{\text{equilibrio}} = (\alpha \times D_{\max} + \beta \times D_{\min}) / (\alpha + \beta)$$

La dinamica verso l'equilibrio ha tempo caratteristico $\tau = 1/(\alpha + \beta)$.

Applicazione: scenario controfattuale per Phoenix

Scenario storico (α elevato, β basso):

- $\alpha = 0.15/\text{anno}$, $\beta = 0.02/\text{anno}$
- $D_{\text{equilibrio}} = (0.15 \times 2.0 + 0.02 \times 1.0) / (0.15 + 0.02) = 1.88$ (teorico, non ancora raggiunto)
- $\tau = 1/0.17 \approx 6$ anni

Scenario policy alternativa (UGB implementata nel 1980):

- $\alpha = 0.05/\text{anno}$ (riduzione sprawl), $\beta = 0.10/\text{anno}$ (incentivazione infill)
- $D_{\text{equilibrio}} = (0.05 \times 2.0 + 0.10 \times 1.0) / (0.05 + 0.10) = 1.33$
- $\tau = 1/0.15 \approx 7$ anni

Proiezione: con policy, Phoenix raggiungerebbe $D \approx 1.35$ entro 2000, invece di 1.67 osservato.

2.5.4 Eventi critici e transizioni di fase

Alcuni eventi possono indurre transizioni rapide in $D(t)$, analoghe a transizioni di fase in sistemi fisici:

Eventi che aumentano D :

- Costruzione di nuove autostrade circumferenziali (apertura di nuovi fronti di sprawl)
- Deregolamentazione urbanistica
- Boom economici rapidi senza pianificazione
- Migrazione massiva verso città
- Disastri naturali che forzano relocatione periferica

Eventi che riducono D :

- Istituzione di greenbelt o urban growth boundaries
- Crisi economiche (rallentamento sprawl, aumento riuso edilizio esistente)
- Grandi investimenti in trasporto pubblico (densificazione attorno a stazioni)
- Gentrificazione di aree centrali precedentemente degradate
- Politiche aggressive di densificazione

Esempio: Seoul Greenbelt (1971)

- Prima del 1971: $dD/dt = +0.08/\text{anno}$ (crescita rapida)
- 1971: Istituzione Greenbelt $\rightarrow$ transizione critica
- Dopo 1971: $dD/dt = -0.04/\text{anno}$ (inversione per infill forzato)
- Salto di D' : $\Delta D'/\Delta t$ discontinuo alla transizione

Trasporto Ottimale e Applicazioni alla Pianificazione Urbana

3.1 Optimal transport: fondamenti matematici

La teoria del trasporto ottimale, sviluppata originariamente da Gaspard Monge nel diciottesimo secolo e modernizzata da Kantorovich nel ventesimo, fornisce un potente framework matematico per affrontare problemi di allocazione e distribuzione ottimale di risorse. Nel contesto urbano, questa teoria trova applicazione naturale nell'ottimizzazione delle reti infrastrutturali dato un pattern di distribuzione della popolazione, problema intimamente connesso alla geometria frattale della città.

3.1.1 Formulazione classica del problema

Il problema del trasporto ottimale nella sua formulazione classica può essere enunciato come segue: date due distribuzioni di probabilità μ (distribuzione iniziale, ad esempio popolazione residenziale) e ν (distribuzione finale, ad esempio localizzazione di servizi o

impieghi) su uno spazio metrico X , trovare la mappa di trasporto $T: X \rightarrow X$ che sposta la massa da μ a ν minimizzando il costo totale di trasporto.

Formulazione di Monge: Trovare $T: X \rightarrow X$ tale che $T\#\mu = \nu$ (T spinge μ in ν) minimizzando:

$$C_{\text{Monge}}[T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

dove $c(x,y)$ è il costo di trasportare un'unità di massa da x a y .

Formulazione di Kantorovich: Trovare una misura di probabilità congiunta π su $X \times X$ con marginali μ e ν che minimizza:

$$C_{\text{Kantorovich}}[\pi] = \int_{X \times X} c(x,y) d\pi(x,y)$$

La formulazione di Kantorovich è più generale (permette "splitting" della massa) e più trattabile matematicamente.

3.1.2 Caso discreto: problematica urbana

Nel caso discreto, con n sorgenti di massa m_i localizzate in posizioni x_i (ad esempio, zone residenziali) e n destinazioni che devono ricevere massa n_j localizzate in posizioni y_j (ad esempio, centri di servizio), si cerca la matrice di trasporto π_{ij} (quantità di massa trasportata dalla sorgente i alla destinazione j) che minimizza:

$$C_{\text{totale}} = \sum_i \sum_j c(x_i, y_j) \times \pi_{ij}$$

soggetto ai vincoli:

- $\sum_j \pi_{ij} = m_i$ (tutta la massa dalla sorgente i viene trasportata)
- $\sum_i \pi_{ij} = n_j$ (la destinazione j riceve la massa richiesta)
- $\pi_{ij} \geq 0$ (trasporti non negativi)

Funzioni di costo tipiche:

- *Lineare:* $c(x,y) = d(x,y)$ - proporzionale alla distanza
- *Quadratica:* $c(x,y) = d(x,y)^2$ - penalizza maggiormente trasporti lunghi (metrica di Wasserstein-2)
- *Potenza:* $c(x,y) = d(x,y)^p$ - generalizzazione con p che modula penalizzazione
- *Concava:* $c(x,y) = d(x,y)^p$ con $p < 1$ - economie di scala (rilevante per trasporti di massa)

3.1.3 Interpretazione urbana e reti ottimali

La soluzione del problema di trasporto ottimale fornisce la distribuzione ottimale dei flussi, che può essere interpretata come la rete infrastrutturale ideale per servire una data configurazione spaziale di domanda e offerta. Questa rete ottimale presenta generalmente una struttura gerarchica e ramificata che ricorda le reti vascolari naturali: tronchi principali che trasportano grandi volumi e si ramificano progressivamente in diramazioni secondarie e terziarie sempre più sottili che raggiungono capillarmente il territorio.

Proprietà delle reti ottimali:

1. *Gerarchia di capacità*: Archi con flussi maggiori hanno capacità maggiore
2. *Struttura ramificata*: Topologia ad albero per minimizzare lunghezza totale
3. *Angoli di biforcazione ottimali*: Determinati da bilancio tra costo di costruzione e costo di flusso
4. *Autosimilarità statistica*: Struttura ripetuta a scale diverse (proprietà frattale)

Teorema (Xia, 2003): Per distribuzioni di sorgenti e pozzi uniformi su dominio regolare, la rete ottimale ha dimensione frattale:

$$D_{\text{rete}} = 1 + 1/p$$

dove p è l'esponente nella funzione di costo $c(x,y) = d^p$.

Per $p=1$ (costo lineare): $D_{\text{rete}} = 2$ (rete riempie il piano) Per $p=2$ (costo quadratico): $D_{\text{rete}} = 1.5$ (rete ramificata ottimale) Per $p \rightarrow \infty$ (costo dominato da distanza massima): $D_{\text{rete}} \rightarrow 1$ (rete degenera in albero spanning minimo)

3.2 Connessione tra geometria frattale e costo infrastrutturale

La relazione tra la dimensione frattale del pattern insediativo e il costo infrastrutturale necessario per servirlo costituisce un tema centrale per la pianificazione urbana sostenibile. Strutture urbane con differenti morfologie frattali richiedono quantitativi molto diversi di infrastrutture per garantire il medesimo livello di servizio alla popolazione.

3.2.1 Relazione teorica tra D e lunghezza infrastrutturale

Consideriamo il problema di fornire connessione a una rete (stradale, idrica, elettrica, telecomunicazioni) a tutte le abitazioni distribuite secondo un pattern bidimensionale di dimensione frattale D . Se le abitazioni sono disposte su una struttura frattale perfettamente autosimilare, la lunghezza totale L della rete necessaria per connetterle scala con il numero di abitazioni N secondo:

$$L \propto N^{(1/D)}$$

Derivazione dimensionale: Per una struttura frattale di dimensione D in uno spazio bidimensionale, N punti occupano un'area $A \propto R^2$ (dove R è il raggio caratteristico), ma sono distribuiti secondo:

$$N \propto R^D$$

Quindi $R \propto N^{(1/D)}$. La lunghezza di rete necessaria per connettere tutti i punti scala come R , quindi:

$$L \propto R \propto N^{(1/D)}$$

Implicazioni per diversi valori di D :

- $D = 1$ (pattern lineare): $L \propto N^1 = N$ (crescita lineare, nessuna economia di scala)
- $D = 1.5$ (pattern ramificato ottimale): $L \propto N^{0.67}$
- $D = 2$ (pattern bidimensionale denso): $L \propto N^{0.5} = \sqrt{N}$ (forte economia di scala)

La lunghezza pro capite quindi:

$$L/N \propto N^{(1/D - 1)} = N^{((1-D)/D)}$$

Per $D < 1$, L/N cresce con N (diseconomia di scala - impossibile per città) Per $D = 1$, L/N costante (nessuna economia di scala) Per $D > 1$, L/N decresce con N (economia di scala, più forte per D elevato)

Paradossalmente, città con D più elevato (sprawl) mostrano economie di scala inferiori!

Il problema del trasporto ottimale nella sua formulazione classica può essere enunciato come segue: date due distribuzioni di probabilità μ e ν su uno spazio metrico, trovare la mappa di trasporto T che sposta la massa da μ a ν minimizzando il costo totale di trasporto. Nel caso discreto, con n sorgenti di massa m_i localizzate in posizioni x_i e n destinazioni che devono ricevere massa n_j localizzate in posizioni y_j , si cerca la matrice di trasporto π_{ij} (quantità di massa trasportata dalla sorgente i alla destinazione j) che minimizza:

$$C_{\text{totale}} = \sum_i \sum_j c(x_i, y_j) \times \pi_{ij}$$

soggetto ai vincoli $\sum_j \pi_{ij} = m_i$ (tutta la massa dalla sorgente i viene trasportata) e $\sum_i \pi_{ij} = n_j$ (la destinazione j riceve la massa richiesta), con $\pi_{ij} \geq 0$.

Nel contesto urbano, le sorgenti possono rappresentare aree residenziali e le destinazioni centri di servizio, luoghi di lavoro, o punti di distribuzione di utilities. Il costo $c(x_i, y_j)$ tipicamente dipende dalla distanza tra i e j , spesso secondo una funzione $c(x,y) = d(x,y)^p$, dove d è la distanza e p è un esponente che modula il tipo di costo considerato. Per $p=1$ si ottiene il semplice costo proporzionale alla distanza; per $p=2$ la metrica di Wasserstein che ha proprietà geometriche particolarmente interessanti.

La soluzione del problema di trasporto ottimale fornisce la distribuzione ottimale dei flussi, che può essere interpretata come la rete infrastrutturale ideale per servire una data configurazione spaziale di domanda e offerta. Questa rete ottimale presenta generalmente una struttura gerarchica e ramificata che ricorda le reti vascolari naturali: tronchi principali che trasportano grandi volumi e si ramificano progressivamente in diramazioni secondarie e terziarie sempre più sottili che raggiungono capillarmente il territorio.

Connessione tra geometria frattale e costo infrastrutturale

La relazione tra la dimensione frattale del pattern insediativo e il costo infrastrutturale necessario per servirlo costituisce un tema centrale per la pianificazione urbana sostenibile. Strutture urbane con differenti morfologie frattali richiedono quantitativi molto diversi di infrastrutture per garantire il medesimo livello di servizio alla popolazione.

Consideriamo il problema di fornire connessione a una rete (stradale, idrica, elettrica, telecomunicazioni) a tutte le abitazioni distribuite secondo un pattern bidimensionale di

dimensione frattale D . Se le abitazioni sono disposte su una struttura frattale perfettamente autosimilare, la lunghezza totale L della rete necessaria per connetterle scala con il numero di abitazioni N secondo:

$$L \propto N^{1/D}$$

Questo risultato, che può essere derivato da considerazioni dimensionali, ha implicazioni profonde. Per un pattern monodimensionale ($D=1$), come abitazioni tutte allineate lungo una strada, la lunghezza cresce linearmente con il numero di abitazioni. Per un pattern bidimensionale compatto ($D=2$), come una griglia urbana densa, la lunghezza cresce solo come la radice quadrata del numero di abitazioni. Per pattern con dimensione frattale intermedia, l'esponente di scaling si colloca tra questi estremi.

Ne consegue che strutture urbane con elevato sprawl (alto D , tipicamente $D > 1,5$) richiedono lunghezze infrastrutturali che crescono quasi linearmente con la popolazione, comportando costi pro capite essenzialmente costanti o addirittura crescenti. Al contrario, città compatte con basso D (tipicamente $D < 1,4$) beneficiano di economie di scala pronunciate, con costi infrastrutturali pro capite che decrescono all'aumentare della dimensione urbana.

Questo principio si applica non solo alla lunghezza delle infrastrutture ma anche ai costi operativi. Reti più estese richiedono maggiore manutenzione, maggiori perdite di trasmissione (nel caso di reti elettriche o idriche), maggiori tempi di spostamento (nel caso di reti di trasporto). Una quantificazione precisa di questi costi aggiuntivi associati allo sprawl è stata oggetto di numerosi studi empirici che hanno confermato l'esistenza di un premio sostanziale: secondo stime conservative, il costo infrastrutturale pro capite in aree con sprawl pronunciato può essere da 1,5 a 3 volte superiore rispetto ad aree con sviluppo compatto.

Il modello dei costi minimi di Steiner

Un approccio specifico per ottimizzare la topologia di una rete infrastrutturale che deve connettere un insieme dato di punti è fornito dal problema dell'albero di Steiner minimo. Dato un insieme di nodi terminali (ad esempio, centri abitati da connettere), si cerca la rete (albero, senza cicli) di lunghezza minima che connette tutti i nodi, permettendo l'introduzione di nodi intermedi (punti di Steiner) in posizioni ottimali.

Nel piano euclideo, i punti di Steiner si collocano in posizioni dove tre archi si incontrano con angoli di 120 gradi, configurazione che minimizza localmente la lunghezza totale. La soluzione del problema di Steiner è computazionalmente complessa (NP-difficile per il caso generale), ma algoritmi euristici e di ottimizzazione globale permettono di trovare soluzioni ottime o quasi-ottime per problemi di dimensioni pratiche.

Si consideri un grafo non orientato:

$$G = (V, E)$$

dove:

- V è l'insieme dei nodi
- E è l'insieme degli archi
- a ciascun arco $e \in E$ è associato un costo (o lunghezza) $c_e \geq 0$

Sia inoltre dato un sottoinsieme di nodi:

$$R \subseteq V$$

detto insieme dei nodi terminali, che devono essere obbligatoriamente connessi.

L'obiettivo è determinare un sottoinsieme di archi:

$$E' \subseteq E$$

tale che:

1. il grafo (V', E') con $V' \subseteq V$ sia connesso
2. $R \subseteq V'$ (tutti i terminali sono inclusi)
3. (V', E') sia aciclico (un albero)
4. il costo totale $\sum_{e \in E'} c_e$ sia minimo
5. V' possa includere nodi in $V \setminus R$, detti nodi di Steiner

Formalizzazione per i problemi di ottimizzazione:

Variabili decisionali

Per ogni arco $e \in E$ introduciamo una variabile binaria:

$x_e = 1$ se l'arco e è incluso nella soluzione

$x_e = 0$ altrimenti

Funzione obiettivo

Minimizzazione del costo totale degli archi selezionati:

$$\min \sum_{e \in E} c_e \cdot x_e$$

Vincoli di connettività (vincoli di taglio)

Per ogni sottoinsieme $S \subset V$ tale che:

- S contiene almeno un terminale: $S \cap R \neq \emptyset$
- S non contiene tutti i terminali: $R \setminus S \neq \emptyset$

si impone:

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1$$

dove $\delta(S)$ è l'insieme degli archi con un estremo in S e l'altro in $V \setminus S$.

Questi vincoli impediscono che i terminali possano essere separati in due gruppi disconnessi.

Vincoli di integrità

$x_e \in \{0, 1\}$ per ogni $e \in E$

Nel piano euclideo, i nodi sono punti in R^2 e il costo c_e è la distanza euclidea tra i due estremi dell'arco.

In questo caso:

- i nodi di Steiner ottimali sono punti interni al piano
- ogni nodo di Steiner ha grado 3
- gli angoli tra i tre archi incidenti sono tutti pari a 120 gradi

Questa configurazione è localmente ottima perché minimizza la lunghezza totale dei tre segmenti che si incontrano nel punto di Steiner.

L'applicazione di questo framework alla pianificazione di reti urbane rivela che la topologia ottimale dipende criticamente dalla distribuzione spaziale degli insediamenti da connettere. Per distribuzioni compatte e relativamente regolari, la rete ottimale assume una struttura ad albero con ramificazioni moderate. Per distribuzioni frammentate e disperse, come quelle caratteristiche dello sprawl, la rete ottimale presenta ramificazioni estese e numerose, con conseguente aumento significativo della lunghezza totale.

Interessante è confrontare la soluzione di Steiner con la soluzione basata sul minimum spanning tree (MST), che connette i nodi senza introdurre punti intermedi. Per distribuzioni casuali uniformi nel piano, la lunghezza dello Steiner tree è circa il 87% della lunghezza dell'MST, rappresentando un guadagno modesto. Tuttavia, per distribuzioni altamente non uniformi e frammentate, il guadagno può essere sostanzialmente maggiore, suggerendo che la localizzazione ottimale di nodi intermedi (hub di trasporto, sottostazioni, centri di distribuzione) può offrire significativi risparmi in contesti di sprawl.

Reti ottimali ramificate e Murray's law

La struttura delle reti infrastrutturali ottimali è strettamente collegata a principi di ramificazione ottimale che sono stati identificati originariamente nello studio dei sistemi vascolari biologici. Murray's law, formulata dal fisiologo Cecil Murray nel 1926, stabilisce che in una rete di trasporto ramificata ottimale (minimizzante il costo totale comprensivo di costi di costruzione e costi di pompaggio), il cubo del raggio di un vaso madre è uguale alla somma dei cubi dei raggi dei vasi figli in una biforcazione:

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$

Questa legge è stata derivata assumendo flusso laminare (legge di Poiseuille) e bilanciando il costo metabolico del volume di sangue con il costo del pompaggio contro la viscosità.

Sorprendentemente, misurazioni empiriche su sistemi vascolari reali confermano questa relazione con notevole precisione.

Nel contesto delle reti urbane, una generalizzazione di Murray's law può essere applicata a reti stradali, idriche, o altre infrastrutture dove il costo dipende sia dalla capacità (sezione) sia dalla lunghezza della rete. L'esponente nella relazione dipende dalle specifiche assunzioni sul costo: per reti elettriche dove domina il costo di costruzione, l'esponente ottimale tende a 2; per reti di trasporto dove domina il costo di transito, può avvicinarsi a 3 o assumere valori intermedi.

Reti che seguono questi principi di ramificazione ottimale presentano naturalmente caratteristiche frattali, con una gerarchia di infrastrutture di capacità decrescente che si ramificano a scale successive. La dimensione frattale di queste reti dipende dalla densità del territorio servito: per servire distribuzioni di domanda con alta dimensione frattale (sprawl), le reti ottimali assumono anch'esse dimensioni frattali elevate, con costi totali significativamente maggiori.

Approcci computazionali: algoritmi di ottimizzazione

L'applicazione concreta della teoria del trasporto ottimale e dei principi di progettazione di reti ottimali alla pianificazione urbana richiede strumenti computazionali sofisticati capaci di gestire la complessità e la scala dei sistemi reali. Negli ultimi anni, progressi algoritmici significativi hanno reso possibile affrontare problemi di ottimizzazione di dimensioni urbane realistiche.

Per il problema del trasporto ottimale discreto con n sorgenti e n destinazioni, la complessità computazionale degli algoritmi classici è $O(n^3)$, che diventa proibitiva per n superiore a qualche migliaio. Algoritmi moderni basati su tecniche di scaling, come l'algoritmo di Sinkhorn regularized optimal transport, riducono drasticamente la complessità introducendo un termine di entropia che regolarizza il problema, permettendo di trattare problemi con decine o centinaia di migliaia di punti.

Per l'ottimizzazione della topologia di reti, approcci basati su algoritmi genetici, simulated annealing, o ottimizzazione tramite colonia di formiche (ant colony optimization) permettono di esplorare lo spazio delle configurazioni possibili e convergere verso soluzioni quasi-ottimali anche quando la dimensione del problema rende impraticabile l'enumerazione esaustiva o la soluzione analitica.

Un approccio particolarmente promettente per la pianificazione urbana integrata combina simulazione tramite automi cellulari della crescita urbana con ottimizzazione della rete infrastrutturale. In questo framework, si simula l'evoluzione del pattern insediativo sotto diverse ipotesi di policy (vincoli localizzativi, incentivi alla densificazione, investimenti infrastrutturali), si calcola per ogni configurazione risultante il costo ottimale dell'infrastruttura necessaria, e si valutano comparativamente gli scenari sulla base di metriche multi-obiettivo che bilanciano costi economici, impatti ambientali, e qualità urbana.

Applicazioni alla pianificazione: scenari e trade-offs

L'integrazione di analisi frattale, modelli di crescita urbana, e ottimizzazione infrastrutturale fornisce un potente toolkit per la pianificazione urbana basata su evidenze quantitative. Diverse città e regioni hanno iniziato a incorporare questi strumenti nei loro processi di pianificazione, generando scenari alternativi di sviluppo futuro e valutandone quantitativamente le implicazioni.

Un caso studio paradigmatico riguarda la regione metropolitana di Copenaghen, dove sono stati sviluppati e confrontati tre scenari: uno scenario business-as-usual che proietta la crescita futura sulla base delle tendenze storiche, uno scenario di sprawl incontrollato che assume completo rilassamento dei vincoli urbanistici, e uno scenario di crescita compatta orientata al trasporto pubblico. Per ciascuno scenario sono state simulate le configurazioni spaziali risultanti all'orizzonte 2050, calcolate le dimensioni frattali dei pattern emergenti, e stimate le lunghezze e i costi delle reti infrastrutturali necessarie.

I risultati hanno quantificato drammaticamente le differenze: lo scenario sprawl generava un pattern con $D \approx 1,68$ e richiedeva il 40% in più di lunghezza di reti idriche e fognarie e il 35% in più di rete stradale rispetto allo scenario compatto, che presentava $D \approx 1,35$. Tradotti in termini economici, i costi infrastrutturali differenziali ammontavano a miliardi di euro. Inoltre, lo scenario sprawl comportava aumenti significativi nelle emissioni da trasporto, nella frammentazione ecologica, e nel tempo medio di commuting.

Questo tipo di analisi comparativa permette ai decisori pubblici di visualizzare quantitativamente i trade-offs tra diverse opzioni di sviluppo e di fondare le scelte su basi più razionali e trasparenti. Tuttavia, è importante riconoscere che la dimensione frattale e il costo infrastrutturale non sono gli unici criteri rilevanti. Aspetti come l'accessibilità a spazi naturali, la diversità del tessuto urbano, le preferenze residenziali individuali, e la vitalità economica devono essere integrati in una valutazione olistica.

Limiti e criticità della geometria frattale nella pianificazione

Nonostante la potenza analitica della geometria frattale e degli approcci quantitativi associati, è essenziale riconoscere i limiti e le criticità di questi strumenti quando applicati alla pianificazione urbana reale. Innanzitutto, la dimensione frattale è una misura riassuntiva che cattura solo alcuni aspetti della morfologia urbana. Due città con la stessa D possono avere configurazioni spaziali molto diverse e qualità urbane distinte. La dimensione frattale non informa direttamente sulla distribuzione spaziale delle funzioni urbane, sulla qualità architettonica, sulla coesione sociale, o su numerosi altri aspetti che determinano la vivibilità urbana.

In secondo luogo, l'identificazione di una morfologia ottimale puramente sulla base di considerazioni di efficienza infrastrutturale può entrare in conflitto con altri valori e obiettivi. Alcune forme di sprawl possono essere desiderate dai residenti che cercano spazi abitativi più ampi, contatto con la natura, o distanza dal rumore e dall'inquinamento urbano. Imporre densificazione forzata ignorando queste preferenze può generare resistenze sociali e outcomes subottimali dal punto di vista del benessere complessivo.

Terzo, i modelli matematici, per quanto sofisticati, rimangono semplificazioni della realtà e incorporano assunzioni che possono essere violate in contesti specifici. L'ipotesi di crescita seguendo regole deterministiche o stocastiche semplici ignora la complessità delle decisioni

umane, che sono influenzate da fattori culturali, psicologici, e idiosincratici difficilmente catturabili in equazioni matematiche.

Infine, la pianificazione urbana non opera in un vuoto tecnocratico ma in un contesto politico e sociale dove interessi diversi, spesso conflittuali, devono essere mediati. L'uso di strumenti quantitativi come l'analisi frattale può informare e arricchire il dibattito, ma non può sostituire il processo deliberativo democratico attraverso cui le comunità decidono collettivamente il loro futuro.

In sintesi, la geometria frattale e gli approcci associati costituiscono un complemento prezioso, ma non esaustivo, al toolkit del pianificatore urbano. Il loro valore principale risiede nella capacità di rendere esplicite e quantificabili le conseguenze di diverse scelte morfologiche, permettendo decisioni più informate e consapevoli pur riconoscendo che la decisione finale deve integrare considerazioni che trascendono la mera ottimizzazione geometrica o economica.

Casi Studio, Metodologie Avanzate e Prospettive Future

Analisi comparativa internazionale: pattern frattali globali

L'applicazione sistematica dell'analisi frattale a campioni estesi di città a livello globale ha rivelato pattern geografici e culturali affascinanti nella morfologia urbana. Studi che hanno analizzato centinaia di città distribuiti su tutti i continenti hanno documentato una variabilità significativa nei valori di dimensione frattale che riflette differenze profonde nei modelli di sviluppo urbano.

Le città europee, in particolare quelle del Mediterraneo e dell'Europa centrale, tendono a presentare valori di D relativamente contenuti, tipicamente nell'intervallo 1,2-1,4. Questo riflette la loro evoluzione storica caratterizzata da nuclei urbani densi di origine medievale o anche più antica, protetti storicamente da mura, e da una tradizione urbanistica che valorizza la compattezza e l'uso misto del suolo. Città come Firenze, Bologna, Barcellona, Vienna, e molte città tedesche e francesi esemplificano questo pattern. Anche quando queste città hanno sperimentato espansioni moderne significative, le normative urbanistiche europee hanno generalmente limitato lo sprawl, favorendo invece densificazioni controllate e sviluppi satellitari pianificati.

Le città nordamericane, in particolare quelle sviluppatesi dopo la Seconda Guerra Mondiale nelle regioni del Sud e dell'Ovest degli Stati Uniti, occupano l'estremo opposto dello spettro con valori di D frequentemente superiori a 1,5 e talvolta prossimi a 1,7. Phoenix, Atlanta, Houston, Los Angeles, Las Vegas rappresentano archetipi di questo modello. La combinazione di abbondanza di territorio disponibile, cultura automobilistica dominante, zonizzazione monofunzionale estensiva, e assenza storica di vincoli significativi all'espansione ha generato morfologie urbane estremamente disperse e frammentate. Il perimetro urbano di queste città si articola in innumerevoli propaggini che seguono autostrade e arterie radiali, con vasti interstizi occupati da deserti, aree agricole, o sviluppi residenziali a bassissima densità.

Le città asiatiche presentano una diversità morfologica considerevole che riflette la varietà di contesti geografici, storici ed economici del continente. Città-stato come Singapore e Hong Kong, vincolate da severi limiti territoriali, hanno sviluppato strutture estremamente compatte e verticali con valori di D molto bassi, tipicamente inferiori a 1,3. All'opposto, megalopoli cinesi come Pechino e Shanghai, che hanno sperimentato espansioni esplosive nelle ultime decennie, mostrano strutture composite: nuclei storici densi circondati da sviluppi periferici dispersi, con D complessivo nell'intervallo medio-alto (1,4-1,6). Città giapponesi come Tokyo presentano caratteristiche intermedie, combinando densità elevate nelle aree centrali servite da trasporto pubblico efficiente con sprawl suburbano nelle regioni periferiche.

Le città dell'America Latina esibiscono tipicamente valori di D medio-alti, riflettendo pattern di crescita rapida spesso non pianificata. La combinazione di urbanizzazione informale, insediamenti spontanei in aree periferiche, e sviluppi formali frammentati genera morfologie complesse con perimetri altamente irregolari. Città come Città del Messico, São Paulo, e Buenos Aires mostrano D nell'intervallo 1,4-1,6.

Le città africane, molte delle quali stanno attraversando fasi di urbanizzazione accelerata, presentano anch'esse elevata irregolarità morfologica. La coesistenza di nuclei coloniali pianificati, espansioni post-indipendenza, e vasti insediamenti informali genera pattern spaziali estremamente eterogenei con dimensioni frattali frequentemente superiori a 1,5.

Metodi avanzati di analisi: multifractal analysis

Mentre la dimensione frattale semplice (monofractale) fornisce una misura utile della complessità geometrica, la realtà urbana è spesso più ricca e richiede descrizioni più sofisticate. L'analisi multifrattale estende il concetto di dimensione frattale riconoscendo che diverse porzioni di una struttura possono esibire proprietà di scala differenti.

Nel framework multifrattale, non si caratterizza la struttura con una singola dimensione D , ma con uno spettro di dimensioni $f(\alpha)$ che descrive come la "densità" di occupazione urbana varia spazialmente. Più tecnicamente, si partiziona lo spazio in celle di dimensione ϵ e si calcola per ciascuna cella i la misura (ad esempio, densità di popolazione o densità edilizia) $\mu_i(\epsilon)$. Si definisce quindi l'esponente di singolarità α_i per la cella i attraverso la relazione:

$$\mu_i(\epsilon) \propto \epsilon^{\alpha_i}$$

L'esponente α quantifica quanto rapidamente la misura nella cella i decresce al diminuire della risoluzione. Celle con α basso corrispondono a regioni ad alta densità dove la misura è concentrata, mentre celle con α alto corrispondono a regioni a bassa densità.

Lo spettro multifrattale $f(\alpha)$ è definito come la dimensione frattale dell'insieme di celle con un dato esponente α . In formule:

$$N(\alpha, \epsilon) \propto \epsilon^{-f(\alpha)}$$

dove $N(\alpha, \epsilon)$ è il numero di celle con esponente di singolarità tra α e $\alpha + d\alpha$. Lo spettro $f(\alpha)$ è tipicamente una funzione concava con un massimo in corrispondenza del valore più probabile di α . L'ampiezza dello spettro quantifica l'eterogeneità della distribuzione spaziale:

distribuzioni uniformi hanno spettro stretto, distribuzioni molto eterogenee hanno spettro ampio.

Applicata alle città, l'analisi multifrattale rivela pattern di eterogeneità spaziale che sfuggono alla caratterizzazione monofrattale. Città con la stessa dimensione frattale media possono avere spettri multifrattali molto diversi, riflettendo diverse distribuzioni di densità. Città monocentriche con un chiaro gradiente di densità decrescente dal centro mostrano spettri multifrattali ampi, mentre città policentriche con densità più uniformemente distribuite mostrano spettri più stretti.

Particolarmente interessante è l'analisi dell'evoluzione temporale dello spettro multifrattale, che fornisce informazioni sui processi di omogeneizzazione o eterogeneizzazione in atto. Processi di gentrificazione, suburbanizzazione, o riqualificazione urbana lasciano impronte caratteristiche nello spettro multifrattale, permettendo di monitorare quantitativamente le trasformazioni del tessuto urbano.

Applicazioni delle reti complesse alla struttura urbana

Un approccio complementare all'analisi frattale geometrica considera le città come reti complesse, dove i nodi rappresentano localizzazioni (incroci stradali, edifici, quartieri) e gli archi rappresentano connessioni (strade, flussi di traffico, relazioni funzionali). La teoria delle reti complesse ha sviluppato un ricco arsenal di metriche e concetti che possono essere proficuamente applicati ai sistemi urbani.

La rete stradale costituisce il substrato fondamentale della città e determina in larga misura la sua accessibilità e funzionalità. Analisi topologiche delle reti stradali hanno rivelato che queste presentano tipicamente proprietà di "small-world": elevato coefficiente di clustering (quartieri localmente molto connessi) combinato con percorsi medi brevi tra località distanti grazie alla presenza di arterie principali che fungono da shortcuts. Questa topologia rappresenta un compromesso efficiente tra costi di costruzione (limitando le connessioni totali) e accessibilità (mantenendo percorsi medi brevi).

Le reti stradali esibiscono inoltre distribuzione delle connettività (degree distribution) che in molti casi approssima leggi di potenza, caratteristica delle reti "scale-free". Questo significa che mentre la maggior parte degli incroci ha poche connessioni (3-4 strade convergenti), esistono alcuni hub con molte connessioni che giocano un ruolo cruciale nella struttura complessiva della rete. La presenza di questi hub è correlata con la dimensione frattale della città: città con sprawl pronunciato tendono ad avere reti stradali con distribuzione di grado più eterogenea e code più pesanti. Un'analisi particolarmente illuminante si ottiene studiando la metrica di centralità (betweenness centrality) dei diversi segmenti stradali, che quantifica quante percorsi ottimali tra coppie di località passano attraverso ciascun segmento. Segmenti con elevata centralità costituiscono bottleneck critici della rete, la cui congestione o interruzione ha impatti sproporzionati sul funzionamento complessivo del sistema di trasporto. La distribuzione spaziale della centralità rivela la struttura gerarchica della rete stradale e identifica assi strategici per interventi di potenziamento. Oltre alle reti fisiche, si possono costruire reti funzionali basate su flussi di mobilità (home-work commuting, movimenti di acquisto, flussi turistici) o su relazioni economiche (network di imprese, catene di fornitura). Queste reti immateriali possono avere topologie molto diverse dalla rete

stradale sottostante e rivelano aspetti complementari dell'organizzazione urbana. Ad esempio, analisi di reti di mobilità basate su dati di telefonia mobile o GPS hanno rivelato che molte città esibiscono strutture policentriche con sottocomunità distinte che interagiscono relativamente poco tra loro, nonostante la prossimità geografica.

Integrazione con remote sensing e big data

I progressi nelle tecnologie di remote sensing, nella disponibilità di big data geolocalizzati, e nelle capacità computazionali hanno rivoluzionato le possibilità di analisi frattale e morfologica delle città. Immagini satellitari ad alta risoluzione, disponibili con copertura globale e temporale densa, permettono di calcolare dimensioni frattali per migliaia di città e di monitorarne l'evoluzione con cadenza annuale o addirittura mensile. Satelliti come quelli della costellazione Landsat (operativa dal 1972) forniscono serie temporali che coprono oltre cinquant'anni, permettendo analisi longitudinali senza precedenti. La risoluzione spaziale è progressivamente migliorata, dai 30 metri di Landsat agli 80 centimetri di satelliti commerciali ad altissima risoluzione come WorldView-3, permettendo di catturare dettagli sempre più fini della struttura urbana. L'integrazione di immagini multispettrali e multitemporali con algoritmi di machine learning (random forests, support vector machines, reti neurali convoluzionali) ha drammaticamente migliorato l'accuratezza della classificazione del suolo urbano, riducendo errori e ambiguità che affliggevano metodi precedenti.

Modelli di deep learning addestrati su milioni di immagini etichettate possono oggi segmentare automaticamente tessuti urbani in categorie funzionali (residenziale, commerciale, industriale, spazi verdi) con accuratezze superiori al 90%, permettendo analisi morfologiche stratificate per tipo d'uso. Big data provenienti da fonti eterogenee arricchiscono ulteriormente le possibilità analitiche. Dati di telefonia mobile forniscono informazioni sui pattern di mobilità a scale temporali molto fini (orarie) e con copertura di popolazione molto ampia. Informazioni di social media geolocalizzati (Twitter, Instagram, Foursquare) rivelano pattern di utilizzo dello spazio urbano e percezioni soggettive della città. Dati di OpenStreetMap forniscono dettagli capillari sulla rete stradale e sulle amenità urbane. L'integrazione di queste fonti diverse con le analisi frattali tradizionali permette di costruire descrizioni multidimensionali ricche che catturano aspetti geometrici, funzionali, e sociali delle città.

Un'applicazione particolarmente promettente riguarda la predizione dello sviluppo urbano futuro. Addestrando modelli di machine learning su serie storiche di immagini satellitari e variabili esplicative (crescita demografica, investimenti infrastrutturali, cambiamenti normativi, indicatori economici), è possibile costruire modelli predittivi che proiettano configurazioni spaziali future. Questi modelli possono essere utilizzati per valutare ex ante l'impatto di diverse politiche, simulando scenari controfattuali e quantificando le differenze nelle dimensioni frattali e nei costi infrastrutturali risultanti.

Frattali urbani e sostenibilità ambientale

La connessione tra morfologia frattale urbana e sostenibilità ambientale costituisce un tema di crescente rilevanza nel contesto delle sfide poste dal cambiamento climatico e dalla necessità di transizioni verso modelli di sviluppo più sostenibili. La geometria frattale della città influenza profondamente numerosi aspetti ambientali, dalle emissioni di gas serra al

consumo di risorse, dalla qualità dell'aria alla biodiversità. Il legame più diretto riguarda le emissioni da trasporto. Città compatte con bassa dimensione frattale tendono a minimizzare le distanze medie percorse dai residenti per accedere a lavoro, servizi, e opportunità ricreative, riducendo conseguentemente le percorrenze veicolari totali. Questo effetto è amplificato dalla maggiore praticabilità del trasporto pubblico e della mobilità attiva (pedonale e ciclabile) in contesti densi. Studi empirici hanno quantificato che, a parità di popolazione, città con $D=1,3$ generano emissioni da trasporto pro capite inferiori del 30-50% rispetto a città con $D=1,6$, un differenziale molto sostanziale. Il consumo di suolo rappresenta un secondo aspetto critico.

Lo sprawl comporta la conversione di ampie superfici agricole o naturali in aree urbanizzate a bassa densità, con perdita irreversibile di servizi ecosistemici (produzione alimentare, sequestro di carbonio, regolazione idrologica, habitat per biodiversità). La relazione tra popolazione urbana e suolo consumato è mediata dalla dimensione frattale: città compatte richiedono proporzioni significativamente minori di territorio per abitante. Questo aspetto è particolarmente critico in regioni con elevata pressione demografica e scarsità di terre fertili. La frammentazione ecologica costituisce una conseguenza particolarmente insidiosa dello sprawl. Pattern urbani altamente frastagliati generano isolamento di patch di habitat naturale, riducendo la connettività ecologica e compromettendo la viabilità di popolazioni di fauna e flora. L'analisi della dimensione frattale dei perimetri urbani può essere integrata con metriche di ecologia del paesaggio per valutare l'impatto sulla biodiversità e identificare corridoi ecologici prioritari da preservare.

L'effetto isola di calore urbana, fenomeno per cui le città sono significativamente più calde delle aree rurali circostanti, è influenzato dalla geometria urbana. Città compatte, sebbene abbiano temperature medie potenzialmente più elevate a causa della maggiore densità di superfici impermeabilizzate, possono essere progettate con infrastrutture verdi (tetti verdi, pareti vegetali, parchi urbani) più efficienti per unità di superficie. Città disperse rendono più difficile e costoso il mantenimento di adeguate dotazioni di verde urbano per abitante. Infine, la vulnerabilità ai cambiamenti climatici è modulata dalla morfologia urbana. Eventi estremi come ondate di calore, precipitazioni intense, e innalzamento del livello marino hanno impatti differenziali su città con morfologie diverse. Città compatte possono implementare più efficacemente strategie di adattamento (reti di raffrescamento, gestione delle acque meteoriche, protezioni costiere), mentre città disperse affrontano sfide maggiori per la protezione dell'intera area urbanizzata.

Verso città "frattalmente ottimali": principi di progettazione

L'accumulazione di conoscenze sulla relazione tra geometria frattale e performance urbane suggerisce la possibilità di articolare principi di progettazione orientati alla realizzazione di città "frattalmente ottimali", che bilancino efficienza infrastrutturale, sostenibilità ambientale, e qualità della vita. Sebbene non esista una configurazione unica universalmente ottimale, alcuni principi generali possono essere enunciati.

Il primo principio è il contenimento della dimensione frattale entro intervalli moderati, tipicamente $D < 1,45$, attraverso politiche che limitino lo sprawl e favoriscano densificazione controllata. Questo non implica densità estreme, che possono essere problematiche per altri

aspetti, ma piuttosto un compromesso che eviti dispersione eccessiva senza generare congestione insostenibile.

Il secondo principio è la promozione di policentrismo e autosimilarità gerarchica. Piuttosto che città monocentriche o completamente disperse, configurazioni policentriche con centri secondari ben connessi possono combinare accessibilità locale con contenimento delle dimensioni complessive. Questa struttura riflette una forma di frattalità funzionale: servizi di prossimità disponibili a scala di quartiere, servizi specializzati a scala di centri secondari, servizi metropolitani concentrati nel centro principale.

Il terzo principio riguarda l'integrazione tra sviluppo urbano e rete di trasporto pubblico, secondo il paradigma del Transit-Oriented Development. Concentrando densità elevate in corridoi serviti da trasporto pubblico efficiente, si ottiene una morfologia che, pur potendo presentare D moderatamente elevato a causa della struttura allungata, minimizza le percorrenze veicolari private e massimizza l'accessibilità sostenibile.

Il quarto principio è la preservazione di bordi definiti e gestione attiva dei confini tra urbano e rurale attraverso greenbelts, zone agricole protette, o parchi periurbani. Questi elementi agiscono come barriere morfologiche che contengono l'espansione indiscriminata, favorendo forme più compatte.

Il quinto principio è l'adozione di strategie di infill development per saturare progressivamente spazi interstiziali sottoutilizzati nelle frange urbane esistenti, riducendo D nel tempo attraverso processi di densificazione selettiva piuttosto che espansione continua.

Questi principi devono essere contestualizzati e adattati alle specificità locali (geografia, clima, cultura, economia), ma forniscono un framework generale per orientare le politiche urbane verso configurazioni spaziali più sostenibili ed efficienti. Cruciale è l'adozione di processi di pianificazione che integrino modellazione quantitativa, valutazione multicriteriale, e partecipazione pubblica, assicurando che le soluzioni tecnicamente ottimali siano anche socialmente accettabili e politicamente realizzabili.

Prospettive future e sfide aperte

Il campo di ricerca sull'applicazione della geometria frattale ai sistemi urbani continua a evolvere rapidamente, con numerose direzioni promettenti e sfide aperte che meritano attenzione futura. Una prima direzione riguarda l'estensione dell'analisi frattale dalla morfologia bidimensionale a caratterizzazioni tridimensionali che incorporino l'altezza degli edifici e la volumetria urbana. La "verticalizzazione" progressiva delle città, particolarmente pronunciata nelle metropoli asiatiche e nei centri finanziari globali, genera strutture spaziali tridimensionali la cui complessità non è pienamente catturata da analisi planimetriche. Sviluppi in LiDAR aereo e fotogrammetria da drone stanno fornendo dati tridimensionali ad alta risoluzione che permetteranno analisi frattali volumetriche più sofisticate.

Una seconda direzione riguarda l'integrazione più stretta tra analisi frattale e modelli basati su agenti (agent-based models) della crescita urbana. Mentre gli automi cellulari catturano efficacemente processi di vicinato e diffusione spaziale, i modelli ad agenti permettono di rappresentare esplicitamente l'eterogeneità degli attori (famiglie, imprese, sviluppatori, autorità pubbliche) e la complessità delle loro interazioni strategiche. L'accoppiamento di

questi modelli micro-fondati con metriche frattali macro può rivelare meccanismi causali più profondi attraverso cui decisioni individuali aggregate generano pattern emergenti.

Una terza direzione riguarda l'analisi dinamica e la predizione di transizioni morfologiche. Identificare segnali precoci di transizioni imminenti verso configurazioni con diversa dimensione frattale, basandosi su indicatori leading ricavati dall'analisi di serie temporali ad alta frequenza, permetterebbe interventi preventivi più tempestivi. Tecniche di early warning basate su critical slowing down e altre firme di sistemi prossimi a punti critici potrebbero essere adattate al contesto urbano.

Una quarta direzione riguarda l'esplorazione di interconnessioni tra frattalità spaziale e altri aspetti della complessità urbana, incluse le dimensioni sociale, economica, e culturale. Esiste correlazione tra dimensione frattale morfologica e dimensione frattale delle reti sociali? Come la geometria frattale influenza pattern di segregazione residenziale e disuguaglianza spaziale? Queste domande richiedono approcci interdisciplinari che integrino geografia quantitativa, sociologia urbana, economia urbana, e scienze computazionali.

Una quinta direzione, di particolare urgenza nel contesto del cambiamento climatico, riguarda l'integrazione dell'analisi frattale con modelli climatici urbani per quantificare come diverse morfologie influenzino microclima, consumo energetico per climatizzazione, e vulnerabilità a eventi estremi. Questa integrazione può informare strategie di adattamento climatico spazialmente esplicite e ottimizzate morfologicamente.

Infine, una sfida metodologica importante riguarda lo sviluppo di framework statistici robusti per testare ipotesi sulla significatività di differenze nelle dimensioni frattali tra città o tra periodi temporali, e per controllare l'influenza di fattori confondenti. Mentre la letteratura ha documentato ampiamente pattern descrittivi, inferenza causale rigorosa rimane limitata. Approcci quasi-sperimentali che sfruttano esperimenti naturali (ad esempio, introduzione di politiche urbanistiche in alcune città ma non in altre simili) potrebbero fornire evidenze più solide sull'efficacia causale di specifiche policy nel modulare la morfologia frattale urbana.

In conclusione, la geometria frattale ha aperto una finestra affascinante sulla struttura delle città, rivelando regolarità universali e fornendo strumenti quantitativi potenti per analisi e pianificazione. Il prossimo decennio promette ulteriori progressi nella comprensione dei sistemi urbani e nella nostra capacità di progettare città più sostenibili, efficienti, e vivibili attraverso l'applicazione consapevole di questi principi.